ناديالنجـــــــــاح كلية العلوم
success club

Université Chouaib Doukkali
Faculté Des Sciences
D'El Jadida

Semestre 2
Filière SMIA

Sujet des examen

Clubnajah2013@gmail.com
www.clubnajah.blogspot.com
www.facebook.com/succes.club

Année universitaire : 2014/2015

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences
El Jadida

Filière SMIA$_2$- Analyse 2
Mme Benzekri
2009-2010

EXAMEN D'ANALYSE 2

(DURÉE 3H)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans l'appréciation de la copie. Toute trace de recherche de la solution sera prise en considération.

Exercice 1 (3 pts).

On considère l'équation différentielle

$$\left(x^2+1\right) y'' + xy' - y = 0 \qquad (E)$$

(1) Montrer que $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ est une primitive de $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

(2) Chercher une solution de (E) sous la forme $y(x) = xz(x)$.

(3) En vérifiant que x est solution de (E), déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 2 (2 pts).

Soit la courbe polaire définie par son équation polaire : $\rho(\theta) = \cos(4\theta)$.

Montrer que le domaine d'étude peut être réduit à $D_E = [0, \frac{\pi}{8}]$ en précisant les symétries correspondantes.

Problème 1 (10 pts).

Dans tout le problème, E est l'ensemble des fonctions f telles que :

- f est continue sur $]0, +\infty[$
- $\int_0^1 tf(t)\, dt$ converge
- $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge

(1) -a- Soit $f_1(t) = \frac{1}{\ln(1+t)}$. A-t-on $f_1 \in E$?

-b- Soit $f_2(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$. A-t-on $f_2 \in E$?

-c- Montrer que si $f \in E$ et si $x > 0$ alors $\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\, dt$ converge.

On pose alors $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}\, dt$.

Tournez la page SVP

(2) On considère la fonction définie par $f(t) = \frac{Arctg\ t}{t^2}$.

-a- Montrer que $f \in E$ et qu'on a pour tout $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{Arctg(xt)}{t\,(1+t^2)}\, dt.$$

On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{Arctg(xt)}{t(1+t^2)}\, dt$.

-b- Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $G'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$

-c- En déduire la valeur de $F(x)$.

-d- Montrer que $\int_0^{+\infty} (\frac{Arctg\ t}{t})^2\, dt$ converge et calculer sa valeur.

(Ind. utiliser une intégration par parties et les questions précédentes)

Problème 2 (5 pts).

Soit $f(t) = (x(t), y(t))$ telle que

$$x(t) = 2t + t^2, \quad y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}$$

(1) Donner le domaine de définition de f et étudier les branches infinies .

(2) Montrer que la courbe admet un seul point double qu'il faut déterminer.

(3) Donner la nature de la courbe au voisinage du point $M(-1)$.

(4) Donner le tableau de variation de x et y.

(5) Tracer la courbe dans le cas où $t > 0$.

Exercice 3 (2 pts bonus).

En utilisant les sommes de Riemann, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Bonne chance

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de mathématique
Et Informatique A.U 2012 - 2013.

Examen d'analyse II , SMIA(II)
Session de rattrapage- durée 3h.

Exercice I : On propose ici de calculer la limite des suites u_n ; v_n définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n} Ln(1 + tg(\frac{k\pi}{4n})) \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} [\frac{\pi}{4n} tg(\frac{k\pi}{4n}) + \frac{1}{n} arctg(\frac{k}{n})]$$

On pose alors $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1 + tg(x))dx$ et $J = \int_a^b f(t)dt + \int_\alpha^\beta g(t)dt.$ Où $f : [a, b] \to [\alpha; \beta]$ est continue strictement croissante; et g sa fonction réciproque.

1. Montrer que : $I = \frac{\pi Ln2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cos(\frac{\pi}{4} - x))dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cosx)dx$
2. En utilisant un changement de variable convenable; motrer que :
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cos(\frac{\pi}{4} - x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cosx)dx$$
3. En déduire la limite de u_n .
4. En utilisant un changement de variable convenable dans : $\int_\alpha^\beta g(t)dt$ montrer que : $J = b\beta - a\alpha$.
5. En faisant un bon choix de a ; b ; α ; β et de f donner la valeur de la limite de v_n.

Exercice II : On pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (Lnx)^q dx \quad p; q \in \mathbb{N}$

1. Montrer que $I_{p,q}$ est bien définie pour tout p, q dans $\mathbb{N}$.
2. Montrer par une I.P.P que $\forall q > 1 \quad I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} I_{p,q-1}$.
3. Calculer $I_{p,0}$.
4. En déduire que $I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.
5. Quelle est la valeur de $\int_0^1 (xLnx)^n dx$.

Exercice III : On pose $f(t) = (t - E(t))e^{-at}$ avec $a > 0$ et $t \geq 0$.

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1}(t-k)e^{-at}dt$
3. En déduire que $\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^1 ue^{-a(u+k)}du$
4. Montrer que $\int_0^1 ue^{-a(u+k)}du = e^{-ak}(\frac{1-(a+1)e^{-a}}{a^2})$
5. Montrer alors que pour tout $n > 0$:
$$\int_0^n f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = [\frac{1-e^{-na}}{1-e^{-a}}](\frac{1-(a+1)e^{-a}}{a^2})$$
6. En déduire la valeur de I.

Exercice IV : On considére l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$.

$$(E_o) \quad x^2y''(x) - 2y(x) + \frac{3}{x} = 0 \quad z(x) = xy'(x) + y(x)$$

1. Montrer que y est solution de (E_o) si est seulement si z est solution de : $(E_1) \quad xz'(x) - 2z(x) = \frac{-3}{x}$.
2. Résoudre (E_1).
3. En déduire que y est solution de (E_o) si est seulement si :
$$(E_2) \quad xy'(x) + y(x) = Cx^2 + \frac{1}{x} \quad C \in \mathbb{R}.$$
4. En déduire alors que les solutions de (E_o) sont sous la forme :
$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx^2}{3} + \frac{Lnx}{x} \quad A \; ; \; B \text{ des constantes réelles non nulles.}$$

Exercice V : (C'est du cours). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en 0.

1. Justifier l'existence est l'unicité de F_n .
2. Calculer $F_1(x)$.
3. En posant $t = tg(\theta)$ montrer que $F_2(x) = \int_0^{arctg(x)} \frac{d\theta}{1+tg^2(\theta)} = \int_0^{arctg(x)} cos^2(\theta)d\theta$.
4. En déduire que $F_2(x) = \frac{1}{4}sin(2arctg(x)) + \frac{1}{2}arctg(x)$.
5. En utilisant une intégration par partie ; montrer que :
$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x).$$
6. En déduire une expression simple de $F_2(x)$ et calculer $F_3(x)$.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de mathématique
Et Informatique A.U 2012 - 2013.

Examen d'analyse II , SMIA(II)- durée 3h.

Exercice I :

1. Calculer la limite de la suite de terme général u_n défini par :

$$u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$$

2. soit $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_n$ et $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq .... \leq b_n$. Motrer que :

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \quad \forall i\, ;\, j \ \in \{1, 2, .., n\}.$$

3. En déduire que : $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.
4. Soit $f; g$ deux fonctions définies de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ croissantes ; bornées .
   i) Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{kx}{n}))(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\frac{kx}{n})) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{kx}{n})g(\frac{kx}{n}).$$

   ii) En déduire que :

$$(\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{kx}{n}))(\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\frac{kx}{n})) \leq x\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{kx}{n})g(\frac{kx}{n}).$$

   iii) En déduire que : $(\int_0^x f(t)dt)(\int_0^x g(t)dt) \leq x\int_0^x f(t)g(t)dt$
   iv) Montrer que :

$$(1 - cosx)(xarcsinx + \sqrt{1 - x^2}) \leq x\int_0^x sint\, arcsintdt \quad \forall x \in]0, 1].$$

Exercice II : On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(sint)dt \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(cost)dt.$

1. Montrer que I et J sont convergentes.
2. Montrer que $I = J$ (penser à un changement de variable).
3. Montrer que : $\quad I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(sin2t)dt - \frac{\pi Ln2}{2}$.
4. Montrer que $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(sin2t)dt = \int_0^{\pi} Ln(sinu)du$.
5. Montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Ln(sinu)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(cosu)du$.
6. En déduire la valeur de $I + J$ et celle de I et J.

Exercice III : On pose : $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{Lnt}{t^2+a^2}dt$ avec $a > 0$.

1. Montrer que $I(a)$ est convergente pour tout $a > 0$.
2. Montrer que $I(a) = \frac{Ln(a)}{a}\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{a}I(1) \quad (u = \frac{t}{a})$.
3. Calculer la valeur de $I(1)$ et donner la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice IV : On propose ici de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$yy'' = 1 + y'^2 \quad (E).$$

1. Montrer que si y est une solution de (E) alors y ne s'annule jamais.
2. En déduire alors que y est trois fois dérivable ; et que : $yy^{(3)} = y'y''$
3. En utilisant 2°) ; montrer que $\left(\frac{y''}{y}\right)' = 0$.
4. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $y'' = \lambda y$.
5. En remplaçant dans (E) ; en déduire que y est sous la forme :

$$y(x) = Ach(\sqrt{\lambda}x) + Bsh(\sqrt{\lambda}x).$$

6. En remplaçant encore dans (E). Montrer que : $\quad yy'' - y'^2 = \lambda(A^2 - B^2)$.
7. En déduire alors que $\mid A \mid > \mid B \mid$ et que $\lambda = \frac{1}{A^2-B^2}$.

Exercice V : Calculer les primitives suivantes :

1. $\quad g(x) = \int^x \frac{du}{\sqrt{2+u}+\sqrt[3]{2+u}} \quad (u = t^6)$.
2. i) Montrer que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 11x + 7}{(x-1)^3(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)} - \frac{1}{(x^2+1)} \end{aligned}$$

   ii) Calculer $h(x) = \int^x f(t)dt$.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de mathématique
Et Informatique A.U 2011 - 2012.

Examen d'analyse II , SMIA(II)- durée 3h.

Exercice I : On propose de calculer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (k^2 + n^2)^{\frac{1}{n}}.$$

1. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
   a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
   b) Calculer $I_n + I_{n-1}$ $n \geq 2$ et I_o.
   c) Montrer par recurrence que :
   $$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_o.$$
   d) En déduire la valeur de : $\lim_{n \to +\infty} u_n$
2. Calculer : $J = \int_0^1 Ln(1 + 4x^2)dx$.
   a) Montrer que :
   $$w_n = Ln(v_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} Ln(1 + 4\frac{k^2}{(2n)^2}).$$
   b) En déduire que $\frac{w_n}{2}$ est une sous suite extraite d'une suite à préciser.
   c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} w_n = 2J$ et donner la valeur de : $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice II :

1. Ennoncer et montrer la première formule de la moyenne.
2. Soient $f; g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continues avec en plus g positive et f croissante. On pose :
   $$h(x) = f(a) \int_a^x g(t)dt \; + \; f(b) \int_x^b g(t)dt.$$

a) Montrer que h est continue sur $[a,b]$ (justifier votre réponse).
b) Comparer $h(a)$; $h(b)$ et $\int_a^b f(t)g(t)dt$.
c) Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt \ + \ f(b)\int_c^b g(t)dt$$

3. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(t)\ Ln(1+t)dt = (1+\frac{\pi}{4})Ln(1+\frac{\pi}{4}) - (1+c)Ln(1+c) \ + c - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice III :

1. a) Montrer que : $I = \int_0^\pi \frac{xsinx}{1+cos^2x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-u)sinu}{1+cos^2u}du$ poser $(x = \pi - u)$
   b) En déduire que : $I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{sinu}{1+cos^2u}du$
   c) Calculer la valeur de I .
2. Calculer la primitive suivante : $g(x) = \int^x \frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}dt$.

Exercice IV :

1. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ l'intégrale suivante converge : $\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^\alpha}dt$.
2. On propose de calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} \quad ; \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

   a) Vérifier que I et J sont convergentes.
   b) Montrer que :

$$\forall\, a > 0 \quad \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{dt}{t^4+1} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{t^2}{t^4+1}dt.$$

   c) En déduire que $I = J$.
   d) En posant $t = e^s$; montrer que $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{chs}{1+2sh^2(s)}ds$ (remarquer que $2I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{1+t^4}dt$).
   e) en utilisant un changement de variable convenable calculer les valeurs de I et J.

Exercice V : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.
2. $y' = \frac{1}{x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + 1$

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de mathématique
Et Informatique A.U 2013 - 2014.

Examen d'analyse II , session de rattrapage
SMIA(II)- durée 3h.

Exercice I : On considére; la suite $(v_n)_n$ et l'intégrale J définies par :

$$v_n = \frac{1}{n^{2p}} \prod_{k=1}^{np} (k^2 + n^2)^{\frac{1}{n}}. \quad J = \int_0^1 Ln(1 + p^2x^2)dx \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

1. a) Montrer que $J = Ln(1 + p^2) - 2p^2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+p^2x^2}dx$.
   b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+p^2x^2}dx$.
   c) En déduire la valeur de J.
2. a) Montrer que $w_n = Ln(v_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{np} Ln(1 + p^2 \frac{k^2}{(np)^2})$
   b) Montrer que $\frac{w_n}{p}$ est une sous suite extraite d'une suite à préciser.
   c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = pJ$ et en déduire la limite de v_n.

Exercice II : Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{x-1}{Lnx}$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to1^-} f(x)$; et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
3. En utilisant un changement de variable convenable montrer que $I = \int_0^1 f(x)dx$.
4. Montrer que $I = \lim_{u\to0^+} \int_u^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx = \lim_{u\to0^+} \int_u^{2u} \frac{e^{-x}}{x}dx$.
5. Montrer que : $\int_u^{2u} \frac{e^{-2u}}{x}dx \leq \int_u^{2u} \frac{e^{-x}}{x}dx \leq \int_u^{2u} \frac{e^{-u}}{x}dx$.
6. En déduire que : $e^{-2u}Ln2 \leq \int_u^{2u} \frac{e^{-x}}{x}dx \leq e^{-u}Ln2$.
7. En déduire la valeur de I.

Exercice III :

1. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{2cosx-2+x^2}{2x^a}dx$ converge (Justifiez vos réponses).

2. Soit p et q des scalaires réels tels que $p^2 - 4q < 0$ On pose :
   $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+pt+q}$
   a) On pose $\alpha = \frac{\sqrt{4q-p}}{2}$. Montrer que $t^2 + pt + q = (t + \frac{p}{2})^2 + \alpha^2$.
   b) Montrer que J est convergente et que $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+\alpha^2}$.
   c) Calculer J.
3. Calculer la primitive suivante : $f(x) = \int^x \frac{sint}{cos^2t-5cost+6}dt$.

Exercice IV : On propose ici de résoudre l'équation différentielle suivante sur $]-1,1[$:

$$(1-x^2)y" - xy' + 4y = arccos(x) \quad (E_1)$$

Et de trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$f'(x) = f(2-x) \quad (B_1)$$

1. On pose $x = cos(t)$ et $z(t) = y(cos(t))$ donc $(t = arccos(x))$.
   a) Calculer $z"(t)$ et $z'(t)$.
   b) Montrer que $y(.)$ est une solution de (E_1) si et seulement si $z(.)$ est solution de : $z"(t) + 4z(t) = t \quad (E_2)$.
   c) Donner la solution générale de (E_2).
   d) En déduire toutes les solutions de (E_1).
2. a) Montrer que si f vérifie (B_1) alors f vérifie : $f" + f = 0 \quad (B_2)$.
   b) Montrer que toutes les solutions de (B_2) sont sous la forme :

   $$f(x) = acosx + bsinx \quad a; b \text{ des scalaires réels .}$$

   c) Soit $f(x) = acosx + bsinx$ une solution de (B_2). Montrer que f est solution de (B_1) si et seulement si :

   $$\begin{aligned} -a &= asin(2) - bcos(2) \\ b &= acos(2) + bsin(2) \end{aligned}$$

   d) Montrer alors que f est solution de (B_1) si et seulement si :

   $$(1 + sin(2))a = bcos(2)$$

   e) En posant $a = \alpha cos(2)$; montrer que f vérifie (B_1) si et seulement si :

   $$f(x) = \alpha(sin(x) + cos(2-x)).$$

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de mathématique
Et Informatique A.U 2013 - 2014.

Examen d'analyse II , SMIA(II)- durée 3h.

Exercice I : On propose ici de calculer la limite des suites u_n ; v_n définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n} Ln(1 + tg(\frac{k\pi}{4n})) \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} [\frac{\pi}{4n} tg(\frac{k\pi}{4n}) + \frac{1}{n} arctg(\frac{k}{n})]$$

On pose alors $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(1 + tg(x))dx$ et $J = \int_a^b f(t)dt + \int_\alpha^\beta g(t)dt$. Où $f : [a, b] \to [\alpha; \beta]$ est continue strictement croissante avec $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$; et où g est sa fonction réciproque.

1. Montrer que : $I = \frac{\pi Ln2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cos(\frac{\pi}{4} - x))dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cosx)dx$
2. En utilisant un changement de variable convenable ; motrer que :
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cos(\frac{\pi}{4} - x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Ln(cosx)dx$$
3. En déduire la limite de u_n .
4. En utilisant un changement de variable convenable dans : $\int_\alpha^\beta g(t)dt$ montrer que : $J = b\beta - a\alpha$.
5. En faisant un bon choix de a ; b ; α ; β et de f donner la valeur de la limite de v_n.

Exercice II : On considére :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost}{\sqrt{1 + costsint}} dt \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sint}{\sqrt{1 + costsint}} dt$$

1. Montrer que $I = J$.
2. Montrer que $I + J = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(t - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{1 + costsint}} dt$.
3. En posant $u = t - \frac{\pi}{4}$ montrer que $I + J = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosu}{\sqrt{2 + cos2u}} du$

4. En déduire que $I + J = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(u)}{\sqrt{1-\frac{2}{3}sin^2(u)}} du$

5. En posant $t = \sqrt{\frac{2}{3}} sin(u)$ montrer que $I + J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

6. En déduire que : $I + J = \sqrt{2} Arcsin(\frac{\sqrt{3}}{3})$. et donner la valeur de I.

Exercice III :

1. (Question de cours) : Rappeler et démontrer le résultat de la régle $x^\alpha f(x)$ sur $[0, +\infty[$ pour l'étude de la convergence absolue de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

2. On considére pour $a > 0$:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} sintdt \quad ; \quad J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} costdt.$$

   a) En utilisant 1°) ; montrer que $I(a)$ et $J(a)$ sont convergentes.
   b) Calculer les valeurs de $I(a)$ et $J(a)$
   (Ind : utiliser le fait que $e^{it} = cost + isint$).

3. Pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante converge. $I = \int_0^{+\infty} \frac{t - sint}{t^\alpha} dt$.

Exercice IV :

On considére l'équation différentielle non linéaire du second ordre suivante.

$$x(x^2+1)y'' + 2y' - 2xy = 2 - 2x^2. \quad (E_1)$$

1. Vérifiez que $y_p(x) = x$ est une solution particulière de (E_1).

2. En partant du principe que la solution générale de (E_1) est sous la forme $y_g(x) = y(x) + y_p(x)$ où $y(x)$ est la solution de l'équation homogène associée à (E_1) qui est telle que :

$$x(x^2+1)y'' + 2y' - 2xy = 0 \quad (E_2)$$

On propose une méthode pour trouver toutes les solutions de (E_2) ; pour cela on pose $z(x) = xy(x)$.

a) Calculer $z'(x)$ et $z''(x)$ en fonction de y ; y' ; y'' et x .

b) Montrer que y est une solution de (E_2) si et seulement si z est solution de :

$$(1+x^2)z'' - 2xz' = 0 \quad (E_3).$$

c) En posant $v(x) = z'(x)$ calculer $v(x)$ en résolvant (E_3).
d) En intégrant $z'(x)$ calculer l'expression de $z(x)$.
e) En déduire la solution de (E_2) puis la solution générale de (E_1).
f) Quelle est l'expression de la solution définie sur $\mathbb{R}$ entièrement.

Exercice V On propose de dessiner la courbe paramétrée définie par :

$$f(t) = (cos^2(t) + Ln(|\ sin(t)\ |); costsint).$$

1. Quel est le domaine de définition de f.
2. Quelle est la période de f et quel interval d'étude proposer vous ?
3. Comparer $f(t)$ et $f(-t)$. Quelle symétrie présente la courbe ? Quel est alors l'interval d'étude réduit ?
4. Dresser le tableau des variations de $x(.)$ et $y(.)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
5. Pour faire l'étude au voisinage du point $M(\frac{\pi}{4})$ qui est stationnaire on pose $u = t - \frac{\pi}{4}$.

   a) Montrer que :

$$cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 - sin(2u)) = \frac{1}{2} - u + \frac{2}{3}u^3 + o(u^3)$$

et que :

$$sint = sin(u + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$$

   b) Montrer que :

$$Ln\ |\ sint\ | = \frac{-Ln2}{2} + u - u^2 + \frac{2}{3}u^3 + o(u^3)$$

   c) En déduire que :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}(1 - Ln2) - (t - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{4}{3}(t - \frac{\pi}{4})^3 + o((t - \frac{\pi}{4})^3) \\
y(t) &= \frac{1}{2}sin(2t) = \frac{1}{2}sin(2u + \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{1}{2}cos(2u) = \frac{1}{2} - u^2 + o(u^3) \\
&= \frac{1}{2} - (t - \frac{\pi}{4})^2 + o((t - \frac{\pi}{4})^3)
\end{aligned}$$

   Que pouvez vous déduire pour le point $M(\frac{\pi}{4})$.

6. Dessiner la courbe de f.

• Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences
El jadida

A .U : 2012/13

ALGEBRE
SMAI S2 durée 3h

EXERCICE 1

Soit m un nombre réel résoudre en fonction de m le système suivant

$$\begin{cases} (3-m)x+y+(1-m)z=m+2 \\ (2+m)x-y+2z=0 \\ (5-m)x-my+3z=m+2 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit E le C espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$; On note $B=\{E_{11};E_{12};E_{21};E_{22}\}$ la base canonique de E et $A=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

Soit alors f l'endomorphisme de E défini par $f(M)=AM-MA$

1°) Trouver la matrice de f dans la base B

2°) Calculer : $f(E_{11}+E_{22})$ et $f(E_{12}-E_{21}+iE_{11})$

3°) Montrer que la famille $\{f(E_{11});f(E_{12})\}$ est libre

4°) En déduire l'image et le noyau de f et leur dimensions

5°) On pose $B'=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

a°) Montrer que B' est une base de E

b°) Quelle est la matrice de f dans la base B' ?

c°) Trouver la matrice de passage de B à B' et son inverse

7°) Déduire de la question 4°) que l'ensemble des matrices de E qui commutent avec la matrice N= $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ est un sous espace vectoriel de E et trouver sa dimension

EXERCICE3

I Soit E l'espace IR^4 ;$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sa base canonique f l'endomorphisme de E défini par :$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$; $f(e_2) = e_4$;

$$f(e_3) = -(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) ; f(e_4) = 0$$

1°) Trouver l'image et le noyau de f et leur dimensions

2°) Montrer que $f^2 = 0$

3°) Quelle relation il y-a entre le noyau et l'image de f ?

4°) Quelle est la matrice de f dans la base B ?

5°) On pose B'=$\{u, v, w, t\}$ où $u = e_1 - e_2$;$v = e_2 - e_3$;$w = f(u)$; $t = f(v)$

6°) Montrer que B' est une base de E et trouver la matrice de f dans cette base

II Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie 2n avec n≥ 1

On suppose que $f^2 = 0$ et que $rgf = n$

1°) Démontrer que $Imf = Kerf$

2°) Soit G un supplémentaire de $Kerf$ et $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ une base de G

Démontrer que $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$ est une famille libre de $Kerf$

3°) Montrer que $\{a_1, a_2, \dots a_n\} \cup \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$ est une base de E

4°) Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences
El jadida

A .U : 2012/13

EXAMEN ALGEBRE S2
SECTION SMAI rattrapage 3 h

EXERCICE 1

Soit m un réel résoudre en fonction de m le système suivant :

$$\begin{cases} (1-m)x+(m+3)y+3mz=1 \\ (m+1)x+(m+1)y=-1 \\ 2x+(m+1)y+(m-1)z=0 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit E l'espace $IR_2[X]$; $B=\{1,X,X^2\}$ sa base canonique pour tout réel α on considère l'endomorphisme f_α de E ayant pour matrice dans la base B :

$$M_\alpha=\begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ -\alpha & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

1°) Calculer le déterminant de f_α
2°) En déduire les valeurs α pour les quelles f_α est un automorphisme
3°) Lorsque f_α n'est pas bijectif déterminer le noyau et l'image de f_α et trouver leur dimension
4°) On pose $B'=\{1+X+X^2,1-X^2,X-X^2\}$ Montrer que B' est une base de E
5°) trouver la matrice de f_α dans la base B' pour chacune des valeurs de α où f_α n'est pas bijectif
6°) Trouver la matrice de passage de B' à B
7°) On pose $F=\{P\in E\ /\ P(j)=0\}$ et $G=\{P\in E\ /\ P(1)=0\}$ Montrer que F et G sont des sous espaces de E et trouver leur dimension
8°) Quels liens relient F, G , $Kerf_\alpha$, Imf_α lorsque f_α n'est pas bijectif

EXERCICE 3

Soit E le **C** espace vectoriel $E = M_2(C)$

1°) Trouver toutes les matrices de E qui commutent avec la matrice

$N = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

On notera F leur ensemble

2°) a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et trouver sa dimension

b) Montrer que F est stable par multiplication matricielle

3°) Soit f l'endomorphisme du R-espace vectoriel F définie par :

$$f(M) = NM$$

On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.; J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.; H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que B ={I,J ,K,H}est une base du R-sous espace F

b) Quelle est la matrice de f dans cette base ?

4°) On pose U=I+J+K. ;V=I-J+K. ;W=J+K+H ;T=J-K+H

et: $A = sev\langle U,T\rangle$ $A' = sev\langle V,W\rangle$ Les sous espaces A et A' sont ils supplémentaires dans F ?

5°) Montrer que A et A' sont stables par f

6°) Trouver la matrice de f dans la base

$B' = \{U,T,V,W\}$

7°) Quelle est la relation qui relie f^4 et Id_F ?

EXERCICE 4

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

1°) Montrer que $Im(f+g) \subset Imf + Img$

2°) En déduire que $rg(f+g) \leq rg\, f + rg\, g$

3°) Montrer que $|rg\, f - rg\, g| \leq rg(f+g)$

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

AU 2011/12
SECTION SMAI
ALGEBRE 2

Durée 3h

EXERCICE 1

Soit m un nombre réel résoudre en fonction de m le système suivant :

$$\begin{cases} (1-m)x+4my+(2m+1)z=1 \\ (m+1)x-(2+2m)y+(m+1)z=0 \\ 2x+(m-3)y+(m+1)z=-1 \end{cases}$$

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

EXERCICE 2

Soit E le **C** espace vectoriel $E=M_2(\mathbb{C})$

1°) Trouver toutes les matrices de E qui commutent avec la matrice $B=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

On notera F leur ensemble

2°) En déduire que F est égal à l'ensemble des matrices de E qui commutent avec la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

3°) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et trouver sa dimension

4°) Soient f et g les applications linéaires suivantes :

$$f: F \to \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a+ib, c+id) \qquad g: F \to \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a-ib, c-id)$$

a) Trouver le noyau et l'image de f et de g et leur dimension

b) Les sous espaces $Kerf$ et $Kerg$ sont ils supplémentaires ?

5°) Trouver toutes les matrices non régulières de F on notera N leur ensemble

6°) Montrer que $N = Kerf \cup Kerg$

7°) Trouver le sous espace vectoriel de F engendré par N

8°) Montrer que toute matrice régulière de F s'écrit comme la somme de deux matrices non régulières de F

EXERCICE 3

I Soit $E = M_3(IR)$ $B = \{E_{ij} / 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3\}$ sa base canonique.

1°) Trouver toutes les matrices $A \in E$ tel que $A = -{}^tA$ On notera F leur ensemble.

a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E

b) Trouver une base de F notée C et donner sa dimension

2°) On pose $J_1 = E_{23} - E_{32}; J_2 = E_{13} - E_{31}; J_3 = E_{12} - E_{21}$

$K_1 = J_1 + J_2 + J_3; K_2 = J_1 - J_3; K_3 = J_2 - J_3$

Montrer que la famille $C' = \{K_1, K_2, K_3\}$ est une base de F

3°) Trouver la matrice de passage de C à C' et son inverse

4°) Soit f l'application :

$$f: \quad F \rightarrow F$$
$$\alpha K_1 + \beta K_2 + \gamma K_3 \rightarrow (\beta - \alpha)J_1 + (\gamma - \alpha)J_2 - (\alpha + \beta + \gamma)J_3$$

Montrer que f est un endomorphisme de F

Trouver la matrice de f dans la base C'

5°) Calculer $f \circ f(K_1)$; $f \circ f(K_2)$; $f \circ f(K_3)$

En déduire que $f \circ f = Id_F$

II Soient E un espace de dimension finie n f un endomorphisme de E vérifiant : $f \circ f = Id_E$

6°) On pose $g = f - id_E$ et $h = f + id_E$

a) Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$

b) En déduire que : $Ker g = \operatorname{Im} h$ et $Ker h = \operatorname{Im} g$

c) Les sous espaces $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} h$ sont ils supplémentaires ?

7°) Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} h$ sont stables par f et trouver la restriction de f à chacun des sous espaces : $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} h$

8°) En déduire l'existence d'une base de E dans la quelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$: $où : m + k = n$.

Université Chouaib doukkali
Faculté des sciences
El jadida

A.U :2009/10

EXAMEN ALGEBRE
SECTION SMAI
S2 durée :3h

Exercice 1

Soit m un nombre réel résoudre en fonction de m le système suivant :

$$\begin{cases} (m-2)x+2y-z=0 \\ 2x+my+2z=1 \\ 2mx+2(m+1)y+(m+1)z=2 \end{cases}$$

Exercice 2

1°) Trouver toutes les matrices carrées d'ordre 2 qui commutent avec la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2°) Montrer que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est un sous espace vectoriel de $M_2(IR)$ et trouver sa dimension

3°) Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

4°) Montrer que A appartient à F et que l'application f de F vers F défini par

$$f : F \to F$$
$$M \to AM$$

est un endomorphisme de F

5°) Trouver la matrice de f dans une base de F

6°) En déduire que f est un automorphisme de F

7°) Trouver l'automorphisme réciproque de f

T.P.S.V.P

Exercice 3

Soient E l'espace vectoriel $IR_2[X], B = \{1, X, X^2\}$ sa base canonique , α un nombre réel et f_α l'endomorphisme de E ayant pour matrice dans la base B :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) Trouver en fonction de α le rang de f_α

2°) Pour quelles valeurs de α : f_α est un automorphisme de E

3°) Trouver lorsque f_α n'est pas un automorphisme de E le noyau et l'image de f_α et leur dimension

4°) On pose $F = \{P \in E / P(j) = 0\}$ et $G = \{P \in E / P(1) = 0\}$

Montrer que F et G sont des sous espaces de E et donner leur dimension

5°) Montrer que $\operatorname{Im} f_1 = F$ et $Kerf_1 = G$

6°) Montrer que $\operatorname{Im} f_{-2} = G$ et $Kerf_{-2} = F$

7°) Soit $B' = \{u, v, w\}$ où : $u = 1 + X + X^2$; $v = 1 - X^2$; $w = 1 - 2X + X^2$

Montrer que B' est une base de E

8°) Trouver la matrice de passage de B à B' et son inverse

9°) Trouver les matrices de f_1 et f_{-2} dans la base B'

10°) Soit P un vecteur de E Trouver les composantes des vecteurs $f_1^n(P)$ et $f_{-2}^n(P)$ dans la base B' en fonction de ceux de P dans B'
n est un entier naturel strictement positif quelconque .

Université Chouaïb Doukkali		Filière : SMIA
Département de Mathématiques	Examen d'Algèbre 2	2013/2014
	Durée : 3 heures	

PROBLÈME 1. (9 points)

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{C}^*$. Soient $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}$ les quatre matrices suivantes :

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1+s & 1 & 1 \\ 1 & 1+s & 1 \\ 1 & 1 & 1+s \end{pmatrix}, \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie1. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$A = mat(f, B_c).$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer P la matrice de passage de B_c à $\mathcal{E}$. Calculer P^{-1}.
3. Soit R la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{E}$.
   a. Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R.
   b. Calculer R^4. En déduire R^{4n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2.

1. Montrer que $(M + I)(M - 2I) = 0$.
2. En déduire que M est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $B = \frac{1}{3}(M + I)$ et $C = -\frac{1}{3}(M - 2I)$. Calculer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $M^n = 2^n B^n + (-1)^n C^n$. En déduire que $M^n = 2^n B + (-1)^n C$.
5. Montrer que cette expression reste valable si $n \in \mathbb{Z}$.

Partie 3. Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} (1+s)x + y + z &= s^2 + 3s \\ x + (1+s)y + z &= s^3 + 3s^2 \\ x + y + (1+s)z &= s^4 + 3s^3 \end{cases}$$

En échelonnant la matrice S augmentée du second membre, montrer que

1. Si $s \notin \{-3,0\}$, le système admet une unique solution, la déterminer.
2. Si $s = -3$, l'ensemble des solutions du système est une droite vectorielle dont on donnera une base.
3. Si $s = 0$, l'ensemble des solutions du système est un plan vectoriel dont on donnera une base.

Pr. Barkatou | Juin 2014

PROBLÈME 2. (8 points)

$\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'endomorphisme qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X).$$

1. On note $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Montrer que la matrice de f dans la base B est

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Montrer que f est bijectif.
3. Calculer la matrice de f^{-1} dans la base B.
4. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :
$$Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$
   a. Expliciter en fonction des réels $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$, le polynôme $P = f^{-1}(Q)$.
   b. On considère pour tout entier strictement positif n, la somme
$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k Q(k)$$
   Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n$, $P(n+1)$ et $P(1)$.
   c. Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de $n,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$.

EXERCICE. (3 points)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ tel que $f(A) = A - {}^tA$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.
2. Déterminer $Ker(f)$ ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $Im(f)$ ainsi que sa dimension. En déduire que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ f(A) = \alpha J.$$

Université Chouaïb Doukkali		Filière : SMIA
Département de Mathématiques	Examen rattrapage d'Algèbre 2	2013/2014
	Durée : 3 heures	

EXERCICE. (4 points)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On suppose que n est pair. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i. $f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$
ii. $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$

PROBLÈME. (16 points)

Partie 1.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ un endomorphisme nilpotent d'indice p (p est le plus petit entier non nul tel que $f^p = 0$).

Question 1.

Soit $x \in \mathrm{F}\backslash\operatorname{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que la famille $\{x,\ f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est libre dans F.

Question 2. En déduire que $p \leq n$.

Dans la suite I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente (c'est-à-dire pour laquelle il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$).

Partie 2.

Question 1. Montrer que $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles et calculer leurs inverses.

Question 2. Calculer $(I_n + N)^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Question 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déduire de ce qui précède, A^{-1} et A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Question 4. Soit B une matrice inversible telle que $BN = NB$, montrer que $B + N$ est inversible.

Question 5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A est inversible et B est nilpotente.

Montrer que $I + A^{-1}BA$ et $I + ABA^{-1}$ sont inversibles et calculer leurs inverses.

Pr. Barkatou — Juin 2014

Partie 3. Dans cette partie, on suppose $n = 3$. On définit alors les matrices suivantes :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{1}{k!} N^k$$

$$\ln(I_3 + N) = \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} N^k$$

On rappelle que $N^0 = I_3$. On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Question 1.

a. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.

b. Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.

Dans la suite, A désigne une matrice quelconque de E.

Question 2.

a. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^m pour tout m de $\mathbb{N}$.

b. Exprimer $\exp(A)$ et $\ln(I_3 + A)$ en fonction de I_3 et de A.

Question 3. Montrer que $\ln(\exp(A)) = A$.

Question 4.

a. Vérifier que $\ln(I_3 + A)$ appartient à E.

b. Montrer que : $\exp(\ln(I_3 + A)) = I_3 + A$.

Question 5. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N} \; \exp(mA) = [\exp(A)]^m$.

Question 6. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et que : $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.

Question 7. Quelle condition doivent vérifier deux matrices A et B de E pour que

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) \,?$$

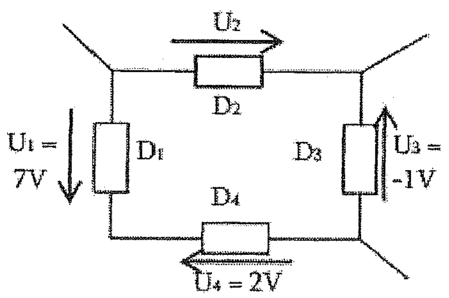
UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
El JADIDA

AU : 2013 - 2014
SMIA

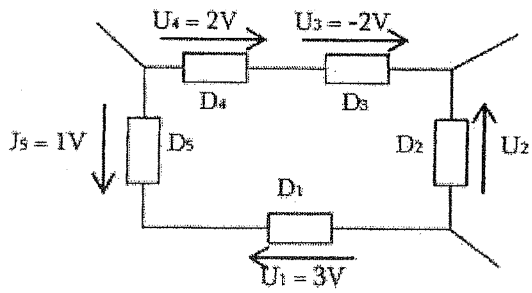
Examen d'électricité (rattrapage)

Exercice 1:

1) Donner l'expression et la valeur de la tension U_2



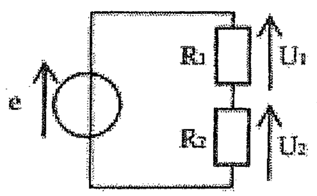
(a)



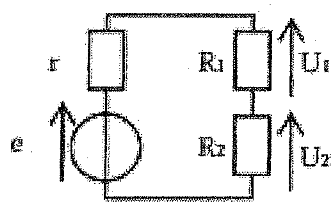
(b)

2) Exprimer U_1 et U_2 en fonction de **e** et des résistances

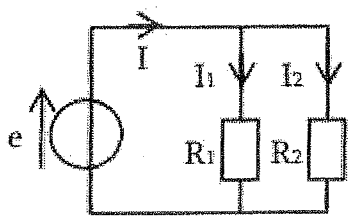
(a)



(b)

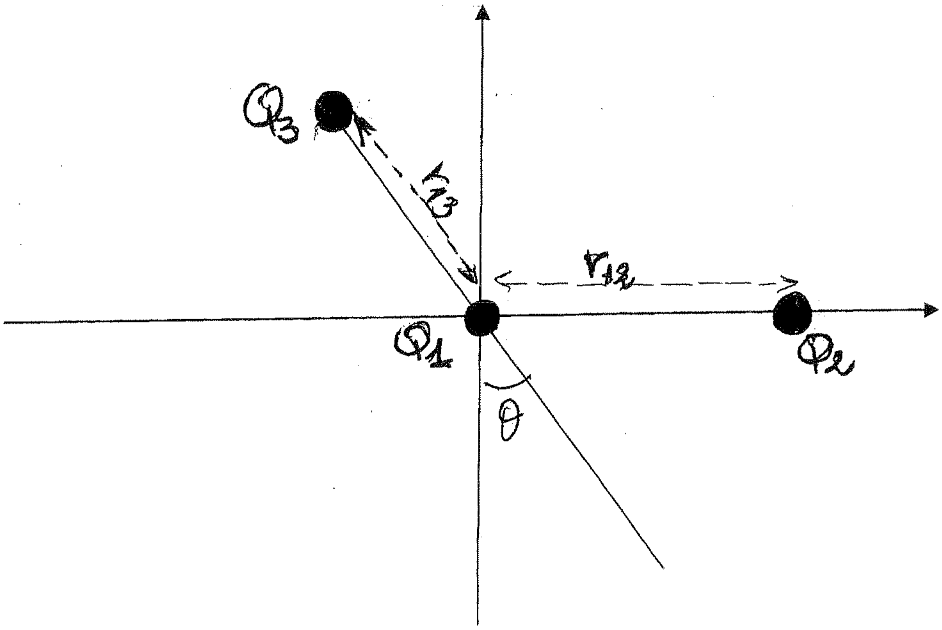


3) Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I et des résistances.



Exercice 2:

1) On considère trois charges Q_1 , Q_2 et Q_3 placées comme l'indique la figure cis dessous.
on donne $Q_1 = -Q$, $Q_2 = +3Q$ et $Q_3 = -2Q$ avec $Q > 0$



a) représenter sur un schéma la direction et sens de la force qui s'exerce par la charge Q_2 sur la charge Q_1
b) représenter sur un schéma la direction et sens de la force qui s'exerce par la charge Q_3 sur la charge Q_1
c) représenter sur le schéma la direction et sens de la force totale
d) Exprimer la force totale dans le rpere (o, i, j)

2)Représenter par un schéma la direction et sens des lignes de champ électrostatique dans les cas suivants:

a) une charge ponctuelle q positive
b) une charge ponctuelle q négative

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
El JADIDA

AU : 2013 - 2014
SMAI

Examen d'électricité

Exercice 1:

soit une sphère de rayon R chargée en volume avec une densité volumique ρ(r) telle que:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{c}{r} & pour\ 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

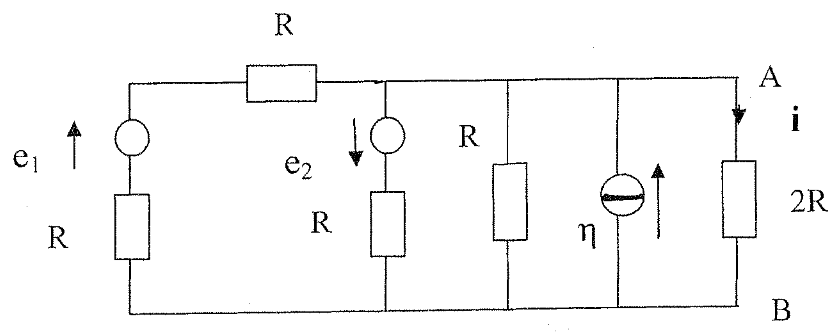
1) Calculer le champ électrique créé par cette distribution en appliquant le théorème de Gauss et en précisant les différentes étapes pour appliquer ce théorème.

2) calculer le potentiel électrostatique (continu et nul à l'infini).

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 2:

Soit le circuit de la figure suivante:



1) déterminer le générateur de Norton entre les points A et B
2) Enoncer la relation d'équivalence entre la représentation de Thevenin et celle de Norton.
3) Déterminer le générateur de Thevenin en utilisant la relation d'équivalence entre le générateur de Thevenin et celui de Norton.
4) Déterminer l'intensité du courant i qui circule dans le dipôle AB de résistance 2R.

UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
-EL JADIDA-

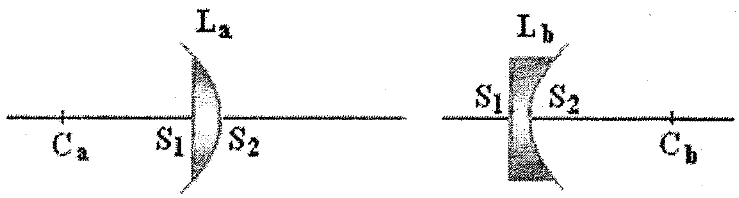
ANNÉE UNIVERSITAIRE : **2013/2014**
Filière : *SMIA*
Module : Physique 2
Session de juin 2014

Examen d'optique I (Durée : 1h30')

- Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3.

- Assurez-vous que la feuille de construction (page 3/3) est bien jointe à la copie à rendre.

Exercice 1 : Association de Lentilles minces



Lentille plan-convexe **Lentille plan-concave**

fig.1

1. On note R_a la valeur absolue du rayon de courbure de la face sphérique d'une lentille mince plan-convexe L_a. Ecrire l'expression de f_a' en fonction de l'indice de réfraction n et de R_a et indiquer, en la justifiant, la nature de la lentille.
2. On note R_b la valeur absolue du rayon de courbure de la face sphérique d'une lentille mince plan-concave L_b. Ecrire l'expression de f_b' en fonction de l'indice de réfraction n et de R_b et indiquer, en la justifiant, la nature de la lentille.
3. Les distances focales de L_a et L_b ont une même valeur absolue égale à 60 cm. On associe L_a et L_b de manière à former un système centré; la distance de leurs centres optiques est $\overline{O_aO_b} = 90\,\text{cm}$ et ce système est représenté à l'échelle 1/10 sur la figure 2.

a) Sur la figure 2 de la feuille jointe, compléter cette figure en indiquant les natures de L_a et L_b, puis en plaçant les différents foyers F_a, F_a', F_b et F_b'.
b) Représenter sur la figure 2 la marche du rayon lumineux incident (1) qui est parallèle à l'axe optique.
c) Représenter sur la figure 2 la marche du rayon lumineux (2) qui émerge parallèlement à l'axe optique.
d) Indiquer sur la figure 2 la position des foyers principaux objet et image du système centré que l'on note respectivement F et F'.
e) Retrouver ces positions par le calcul en exprimant $\overline{O_aF}$ et $\overline{O_bF'}$.
f) Déterminer la distance focale f' du système.
g) Indiquer sur la figure 2 la position des plans principaux objet et image du système centré.
h) Retrouver ces positions par le calcul en exprimant $\overline{O_aH}$ et $\overline{O_bH'}$.

Exercice 2: Lentilles demi-boules

1) On considère une lentille plan convexe (demi-boule) en verre d'indice n = 1,52, de sommet S, placée dans l'air, la valeur absolue du rayon R de la face sphérique est de 6 cm (fig.1). Cette lentille est entièrement éclairée par un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal. On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

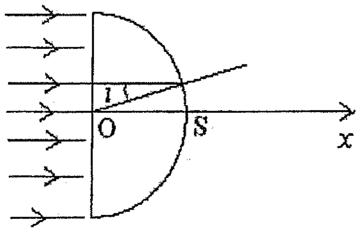


fig.1

1a) La face plane reçoit le rayonnement (fig.1). Montrer que l'intégralité du faisceau incident n'est pas transmise par la lentille (c-a-t-d qu'il y a aussi des rayons qui subissent des réflexions totales).

1 b) Quel est le diamètre du faisceau émergent?

1c) Mêmes questions si la face sphérique de la lentille reçoit le rayonnement (fig. 2).

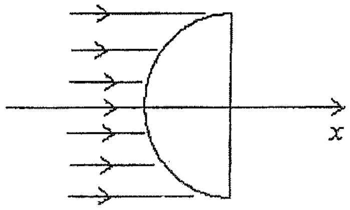


fig.2

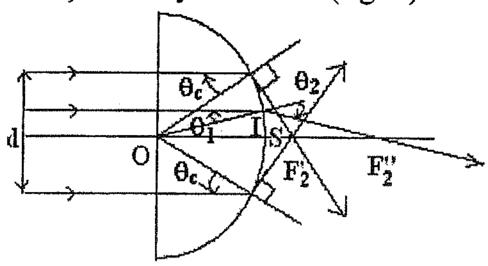


fig.3

1d) Montrer que la lentille n'est pas stigmatique (fig. 3).

2) On considère maintenant un système optique formé par deux demi-boules en verre dont les sommets S et S' sont confondus (fig. 4). On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

2a) Déterminer la position du foyer image F' du système optique ainsi formé.

2b) En déduire celle du foyer objet F.

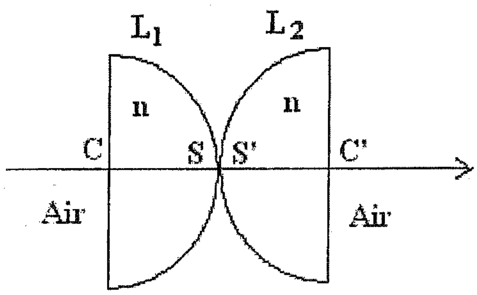


fig.4

Feuille de construction (Exercice 1) à rendre avec la copie.

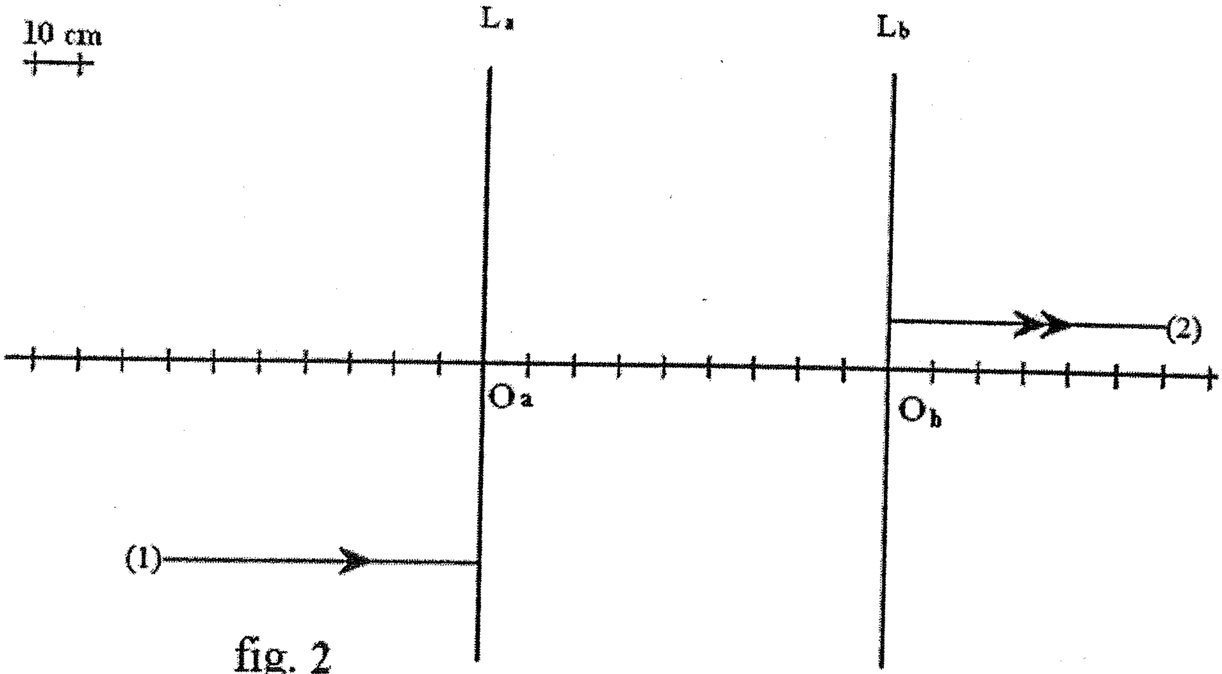


fig. 2

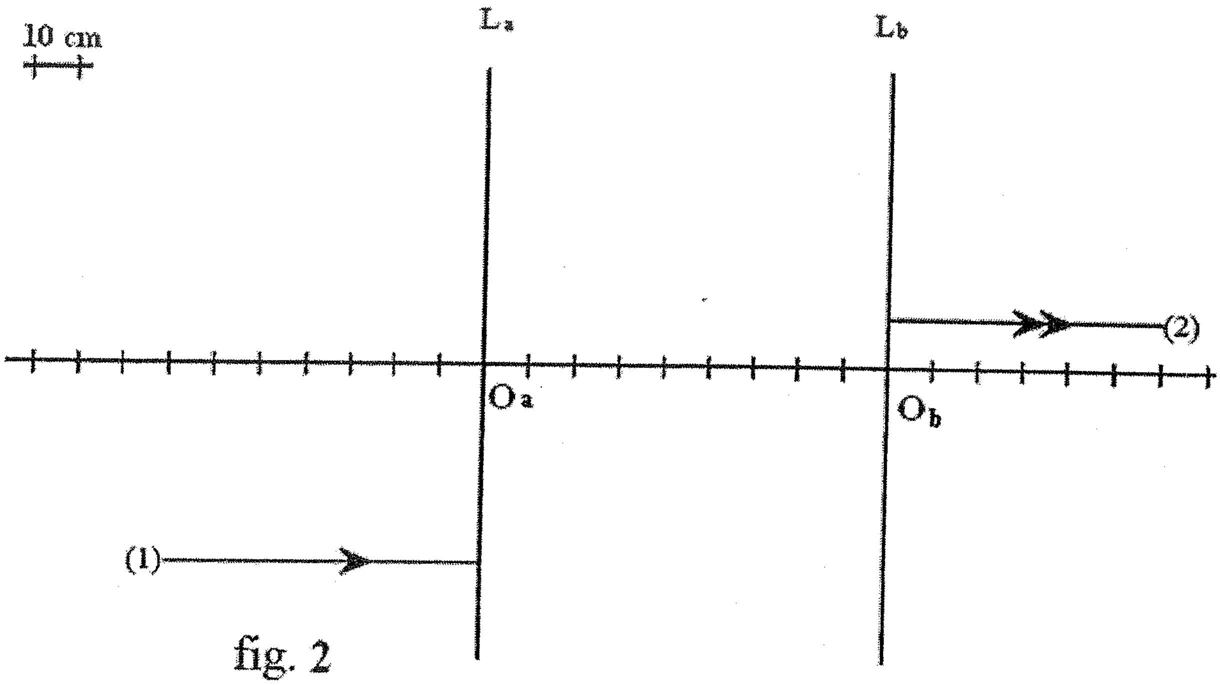


fig. 2

UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
-EL JADIDA-

ANNÉE UNIVERSITAIRE : **2013/2014**
Filière : SMIA
Module : Physique 2
Session de rattrapage 2014

Examen d'optique I (Durée : 1h30')

Questions de cours :

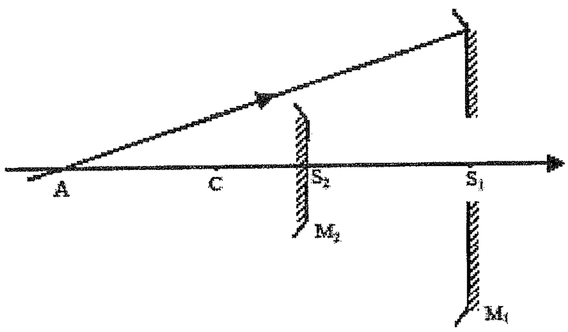
Un objet réfléchit les deux couleurs primaires ***rouge*** et ***verte***. Comment apparaît-il lorsqu'il est éclairé en lumière :

I. Cyan (bleu+vert) ?
II. Magenta (rouge+bleu) ?
III. Jaune (rouge+vert) ?
IV. Bleu
V. blanche ?

Exercice 1 :

On considère deux miroirs sphériques M_1 et M_2 de même centre C tels que M_1 est concave de rayon $\overline{CS_1} = 3R$ et M_2 est convexe de rayon $\overline{CS_2} = R$.

Une ouverture percée dans M_1, centrée sur l'axe principal commun des deux miroirs, permet à la lumière de se propager à droite de M_2. On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.



1. Etablir la relation entre les positions d'un objet A et de son image A' donnée par le système optique constitué par l'ensemble des deux miroirs M_1 et M_2 en fonction de $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.
2. Déterminer la position de l'image A'.
3. Déterminer le grandissement linéaire transversal correspondant.
4. Montrer que ce système est équivalent à une lentille mince dont on précisera le centre et la distance focale. Préciser la nature de cette lentille.

Exercice 2**: **Doublet (4, 3, 2)

Un doublet oculaire de lentilles minces (L_1, L_2) a pour symbole (4, 3, 2), c'est-à-dire que l'on peut écrire $\frac{f'_1}{4} = \frac{e}{3} = \frac{f'_2}{2} = a$ où a est l'échelle du doublet, et pour focale f ' = 24 mm.

1) Calculer les distances focales image f'_1 et f'_2, ainsi que la distance $e = \overline{O_1O_2}$.

2) Calculer les positions des foyers F et F' du système constitué par ces deux lentilles. On donnera, en valeur algébrique : $\overline{O_1F}$ et $\overline{O_2F'}$.

3) Calculer les positions des points principaux H et H' du système constitué par ces deux lentilles. On donnera, en valeur algébrique : $\overline{O_1H}$ et $\overline{O_2H'}$.

4) Construire les points cardinaux sur un schéma à l'échelle 1 et vérifier les résultats du 2 et 3)

UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
-EL JADIDA-

ANNÉE UNIVERSITAIRE : **2012/2013**
*Filière : **SMIA***
Module : Physique 2
Session de juin 2013

Examen d'optique I (Durée : 1h30')

Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3.

<u>Document à rendre avec la copie :</u> **-Feuille-réponse (page 3/3)**

<u>Exercice 1</u> Construction géométrique (**feuille-réponse ci-jointe (page 3/3)**).
A) Tracé de rayon pour un miroir concave
Compléter le tracé du rayon 1 (figure 1):
1) En utilisant des rayons parallèles au rayon 1 (deux méthodes)
2) En utilisant des rayons coupant le rayon 1, plan focal objet (deux méthodes)

B) Construire par diverses méthodes le rayon réfracté correspondant à un rayon incident quelconque pour un dioptre sphérique concave.

Refaire les mêmes constructions pour un dioptre sphérique convexe (figure 2).

C) Construire la marche d'un faisceau lumineux à travers le système optique constitué de deux lentilles (figure 3).

<u>Exercice 2</u> lentille+miroir

On place un miroir plan dans le plan focal image d'une lentille convergente de vergence V=0.2 δ.
a. Montrer qu'un rayon lumineux ressort parallèlement à lui-même après avoir traversé le système optique (lentille+miroir).
b. Trouver la position et la taille de l'image d'un objet placé dans le plan focal objet de la lentille.
c. En traçant l'image d'un objet quelconque, donner la relation de conjugaison avec origine en F et le grandissement du système étudié.

<u>Exercice 3</u> Etude du doublet optique (3, 2, 1)

On définit un doublet de lentilles minces par la donnée de 3 nombres : f'_1, $e = \overline{O_1O_2}$, f'_2 (figure 4).
Le doublet a pour symbole (3, 2, 1), c'est-à-dire que l'on peut écrire $f'_1 = 3a$, $e = 2a$, $f'_2 = a$, où a est l'échelle du doublet. On prendra pour les applications numériques : a=2cm.
1.a) placer sur un axe optique (figure à l'échelle) les foyers de L_1 et L_2 et déterminer par construction géométriques les foyers, objet et image, notés F et F'.
b) Vérifier ces résultats en déterminant algébriquement les positions des foyers F et F'.

2. On appelle plans principaux du système un couple de plans conjugués correspendant à un grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +1$$

et on appelle points principaux H et H' les intersections de ces plans avec l'axe optique :
Déterminer algébriquement :

a. La distance focale f'.
b. les positions de H et H'.
c. Les positions des points nodaux N et N'.

3. En utilisant ces éléments cardinaux, construire l'image d'un objet virtuel AB situé à 1cm de L_1

4. Vérifier sa position et son grandissement par le calcul.

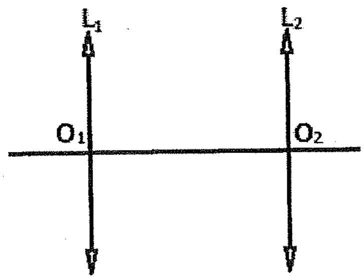


Figure 4

Feuille-réponse à rendre avec la copie

SMIA - Juin 2013

Non et prénom :

Figure 1 **Miroirs sphériques**

1)

2)

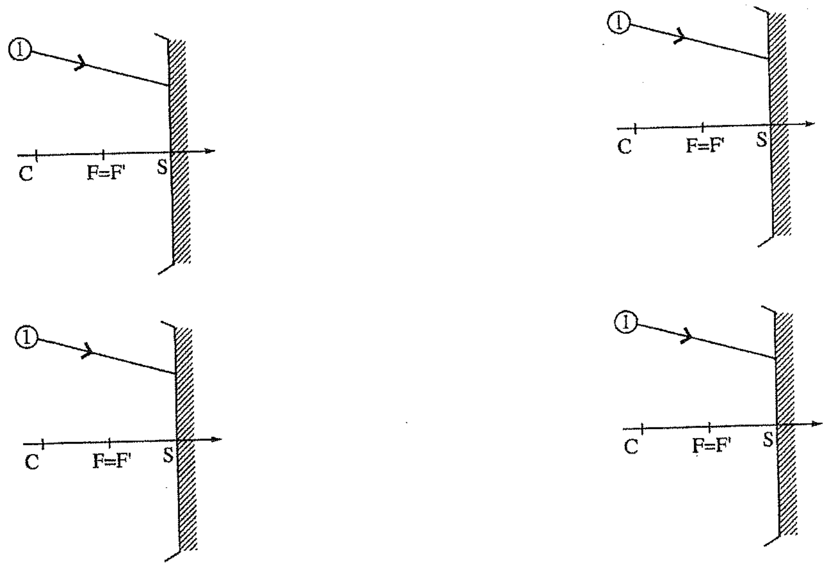
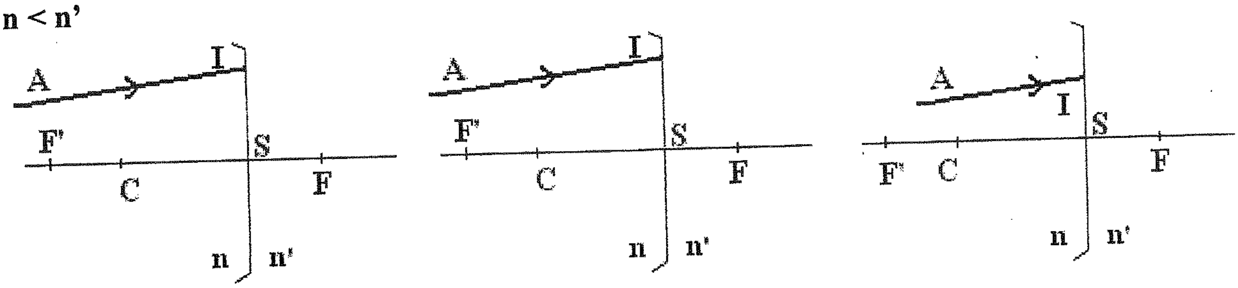


Figure 2 **Dioptres sphériques**

n < n'



n > n'

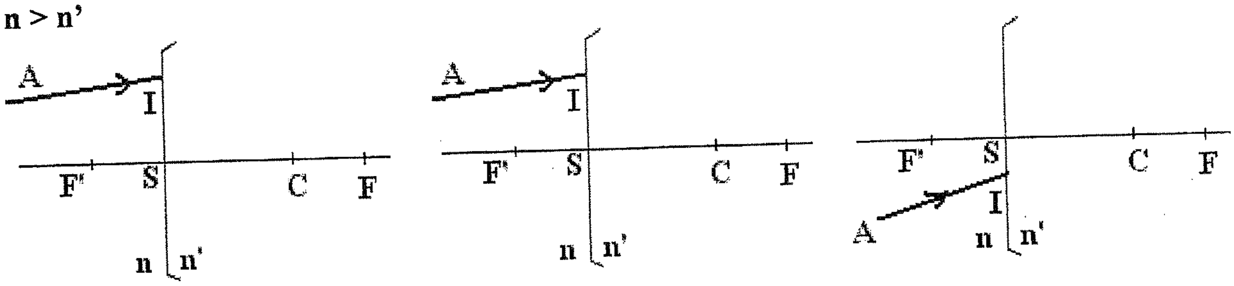
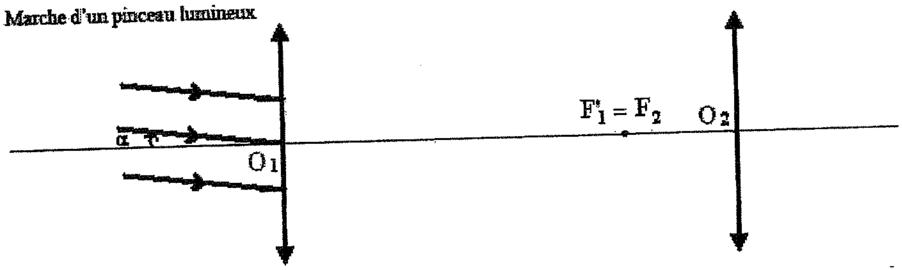


Figure 3 **Lentilles minces**

Marche d'un pinceau lumineux



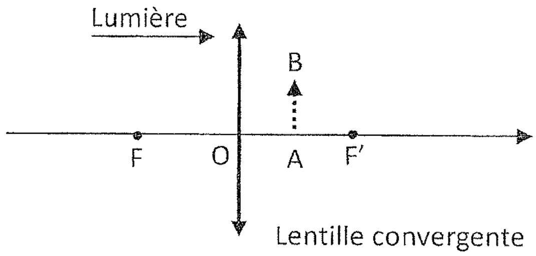
UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
-EL JADIDA-

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2011/2012
Filière : SMIA
Module : Physique 2
Session de juin 2012

Examen d'optique I (Durée : 1h30mn)

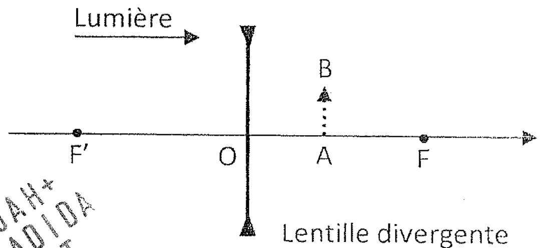
Exercice 1 : Constructions géométriques

Construire l'image A'B' de l'objet AB dans les cas (a), (b), (c) et (d) suivants :



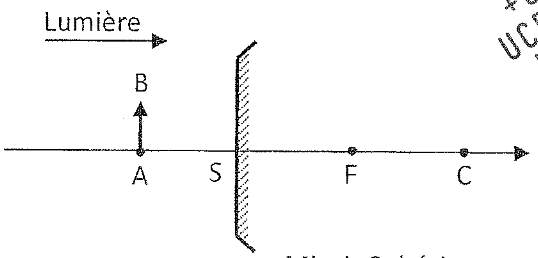
Lentille convergente

(a)



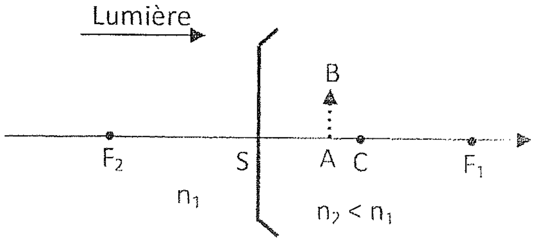
Lentille divergente

(b)



Miroir Sphérique

(c)



Dioptre Sphérique

(d)

Exercice 2 :

On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.

La formule de conjugaison d'un miroir sphérique avec origine au sommet S s'écrit :

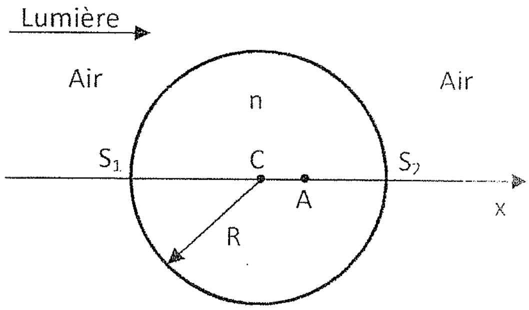
$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

En partant de la formule ci-dessus, montrer qu'on peut obtenir la formule de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre C :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

Exercice 3 :

On considère un récipient transparent sphérique d'épaisseur négligeable, de centre C et de rayon R. Il est rempli d'un liquide transparent d'indice optique n et est placé dans l'air d'indice 1. On se



placera dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Partie I :

Un point lumineux A se déplace le long du diamètre S_1S_2 à l'intérieur de ce récipient (voir figure ci-dessus). On désigne par A' son image après une réfraction à travers la face droite du récipient. On repère les positions de A et de A' respectivement par $x = \overline{CA}$ et $x' = \overline{CA'}$.

1°) Ecrire la relation de conjugaison qui lie les positions de A et A'.

2°) a) En déduire l'expression de x' en fonction de x, n et R.

b) Que vaut x' lorsque x = R/2. Quelle est la nature de A'? Justifier.

3°) a) Ecrire la relation du grandissement linéaire γ.

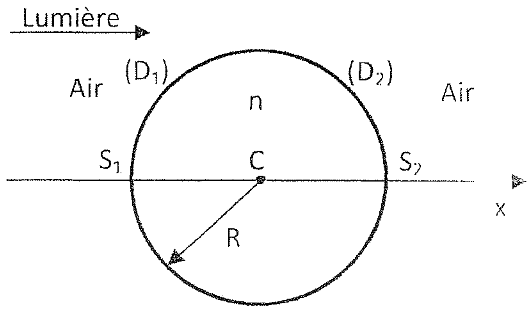
b) Exprimer γ en fonction de x, n et R.

c) Que vaut γ :

i) lorsque A est en S_1 ?

ii) lorsque A est en S_2 ? Que remarque-t-on pour ce cas?

Partie II :



On considère maintenant le récipient transparent sphérique, d'indice n et baignant dans l'air d'indice 1, comme formé par l'association de deux dioptres sphériques (D_1) (face d'entrée) et (D_2) (face de sortie) de même centre C, de sommets S_1 et S_2 et de rayons $\overline{S_1C} = R$ et $\overline{S_2C} = -R$ où R représente une constante positive. On se placera toujours dans les conditions de l'approximation de Gauss.

On considère un point objet réel A situé dans l'air, en avant de la première face (D_1). Soit A_1 son image à travers (D_1) et A' l'image de A_1 à travers (D_2).

1°) a) Déterminer la vergence V_1 pour le dioptre (D_1).

b) En déduire l'expression des distances focales objet f_1 et image f'_1.

2°) a) Déterminer la vergence V_2 pour le dioptre (D_2).

b) En déduire l'expression des distances focales objet f_2 et image f'_2.

3°) Déterminer la relation de conjugaison qui lie l'objet A et l'image finale A' à travers tout le système formé par l'association de (D_1) et (D_2).

4°) Etablir l'expression des distances focales $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$.

5°) Déterminer la position $\overline{S_2F'}$ du foyer image F' du système. En déduire $\overline{S_1H}$ et $\overline{S_2H'}$ respectivement les positions des plans principaux objet H et image H' du système.

UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
-EL JADIDA-

ANNÉE UNIVERSITAIRE : **2012/2013**
Filière : **SMIA**
Module : Physique 2
Session de rattrapage 2013

Examen d'optique I (Durée : 1h30')

Exercice 1:

On considère une bulle d'air (indice $\mathbf{n_2} \approx \mathbf{1}$) immergée dans de l'eau (indice $\mathbf{n_1 = 4/3}$). un rayon lumineux incident parallèle à son axe de symétrie SC rencontre la bulle au point I avec un angle d'incidence i (voir *Figure 1*, feuille ci-jointe). Le rayon incident est à une distance d de l'axe de symétrie SC. La bulle correspond à une sphère de rayon $\boldsymbol{R}$ et de centre $\boldsymbol{C}$.

1. On se place dans des conditions telles qu'il y ait réflexion totale du rayon en $\boldsymbol{I}$. Tracer sur ***la Figure 1***, le rayon réfléchi au point $\boldsymbol{I}$.
2. A partir de quel angle d'incidence $i = \theta_c$ (θ_c angle critique de réflexion totale) le rayon sera-t-il totalement réfléchi ? Evaluer l'angle θ_c. Application numérique.
3. A quelle distance $\boldsymbol{d_{\theta c}}$ est alors situé le rayon incident? Application numérique pour $\boldsymbol{R} = 4$ mm.
4. Dans le cas où $i > \theta_c$, le rayon est totalement réfléchi. Représenter sur la ***Figure 2***, l'angle D de déviation du rayon, c'est-à-dire l'angle par lequel le rayon incident est dévié de sa direction initiale. Exprimer D en fonction de i.
5. Dans le cas où $i < \theta_c$, le rayon subit aussi plusieurs réfractions (voir ***Figure 3***). Soit r l'angle de réfraction correspondant au passage eau-bulle d'air. Représenter sur la Figure 3, l'angle D' de déviation du rayon en sortie, c'est-à-dire l'angle que fait le rayon à la sortie de la bulle par rapport au rayon incident. Exprimer l'angle $\boldsymbol{D'}$ en fonction de i et r (On notera que le triangle IJC est isocèle en C).

Exercice 2:

On considère un dioptre sphérique d'axe optique Δ, de centre C_1, de sommet S_1 et de rayon $\overline{S_1C_1} = R$ séparant deux milieux transparents, homogènes et isotropes d'indices de réfraction respectifs **n** et **n'**. On donne $\overline{S_1F_1} = f_1 = -2R$; $\overline{S_1F'_1} = f'_1 = 3R$ et $\mathbf{n} = 1$.

1. Déterminer l'indice de réfraction **n'**.
2. Un objet AB est placé en A sur l'axe optique tel que $\overline{F_1A} = R$. On désigne par A_1 le conjugué de A par rapport au dioptre **D**.

   a. Déterminer la position de l'image A_1 par rapport à F'_1.
   b. Déterminer le grandissement linéaire γ_1 du dioptre **D**. En déduire la nature de l'image.
   c. Déterminer $\overline{S_1A_1}$.

3. On place maintenant un miroir sphérique concave **M**, de même axe Δ, de centre C_2, de sommet S_2 et de rayon $\overline{C_2S_2} = 2R$, **M** est placé dans le milieu d'indice **n'**. Le centre C_2 du miroir **M** est placé à la distance R de C_1 ($\overline{C_1C_2} = R$).

   a. Déterminer la position de l'image A_2 de A_1 par rapport au miroir (en utilisant la relation de conjugaison avec origine au sommet du miroir (S_2)).

b. Déterminer la position de l'image définitive A' tel que : $A \xrightarrow{D} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \xrightarrow{D} A'$

c. Placer sur l'axe optique Δ (***Figure 4***) les foyers F_1, F'_1, F_2 et F'_2 , Les centres C_1 et C_2 de **D** et **M**. Déterminer par construction géométrique les images A_1B_1, A_2B_2 et $A'B'$.

4. On déplace le miroir **M** par rapport au dioptre **D.** Quelle doit être la position du centre C_2 par rapport à C_1 pour qu'un rayon incident parallèle à l'axe Δ émerge, du milieu d'indice **n**, confondu avec lui-même?

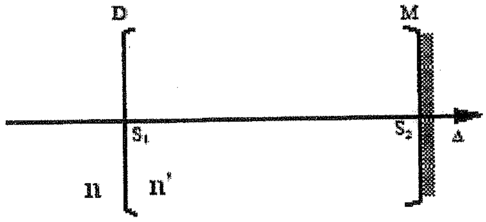


Figure 4

Bon Courage

UNIVERSITÉ CHOUAIB DOUKKALI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
-EL JADIDA-

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2009/2010
Filière : **SMIA**
Module : Physique 2
Session de juin 2010

Examen d'optique I (Durée : 1h30')

Questions de cours

1. Rappeler les définitions d'un système centré et des plans principaux objet et image.
2. Enoncer la méthode de détermination graphique des points nodaux N et N'.

Exercice 1 :

On considère une lentille mince biconvexe en verre dont les rayons $\overline{S_1C_1}$ et $\overline{S_2C_2}$ ont même valeur absolue : $R=\left|\overline{S_1C_1}\right|=\left|\overline{S_2C_2}\right|$, d'indice n_2, baignée à gauche par l'eau d'indice $n_1$et à droite par l'air d'indice n_3.

Un objet réel AB, de longueur 10 mm, est placé dans l'eau, à 20 cm du centre optique S de la lentille. Les conditions de Gauss sont respectées.

1. La lentille L est mince : elle donne d'un objet A une image A'.

En utilisant les formules de conjugaison dans les conditions de Gauss, montrer que la vergence V (ou convergence C) de L s'écrit : $V=\dfrac{2n_2-n_1-n_3}{R}$.

2. Calculer les distances focales objet et image, F et F', de la lentille A.N. : n_1=1,325; n_2=1,5; n_3=1,0; R=0,25 m.

3. Calculer la position de l'image $\overline{A'B'}$. En déduire le grandissement linéaire $\gamma=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

4. Déterminer la taille de l'image $\overline{A'B'}$.

5. Déterminer la relation de conjugaison lorsque la face de sortie de la lentille L est argentée. En déduire le foyer image.

Exercice 2 :

On considère un doublet de lentilles minces convergentes L_1 et L_2. La lentille L_1, de centre S_1, a une distance focale image f'_1=4,5 cm. L_2, de centre S_2, a une distance focale image f'_2=2 cm. Elles sont disposées de sorte que $\overline{S_1S_2}=3cm$. Un objet AB est placé perpendiculairement à l'axe optique, 9 cm devant L_1.

1. Construisez l'image $\overline{A'B'}$ de $\overline{AB}$ par ce doublet.
2. Vérifiez par le calcul la position et le grandissement de cette image.
3. Déterminer la distance focale f'.

Feuille de figures à remplir et à rendre avec votre épreuve

Nom :

Prénom :

Exercice 1

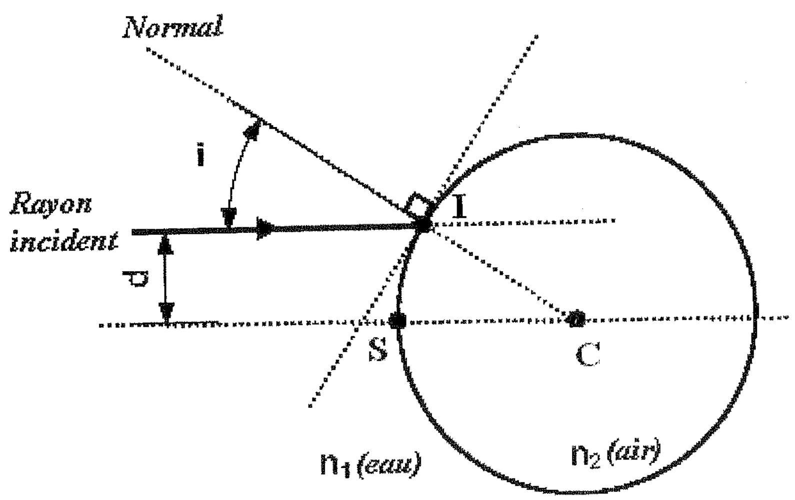


Figure 1

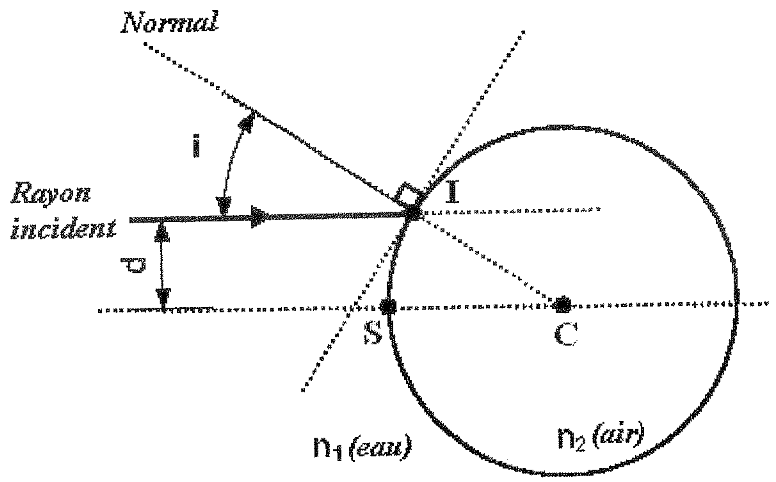


Figure 2

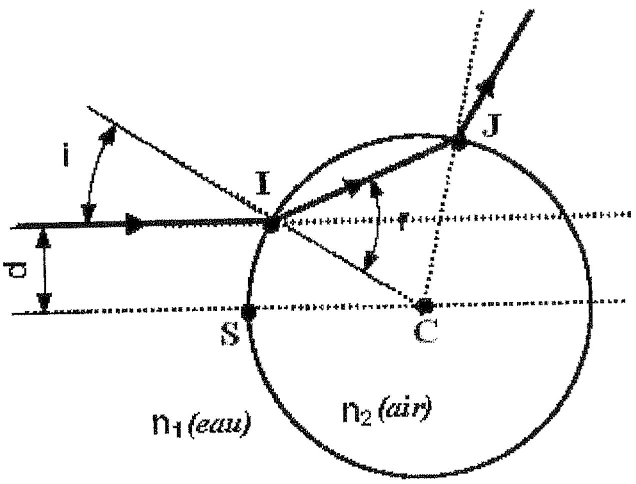


Figure 3

Feuille de figures à remplir et à rendre avec votre épreuve Nom et Prénom :

Images A_1 ***et*** A_2

<u>Exercice 2</u> (Fig. 4) Echelle : 2 carreaux→R

Image A'

Année Universitaire 2011/2012

Nom et Prénom :

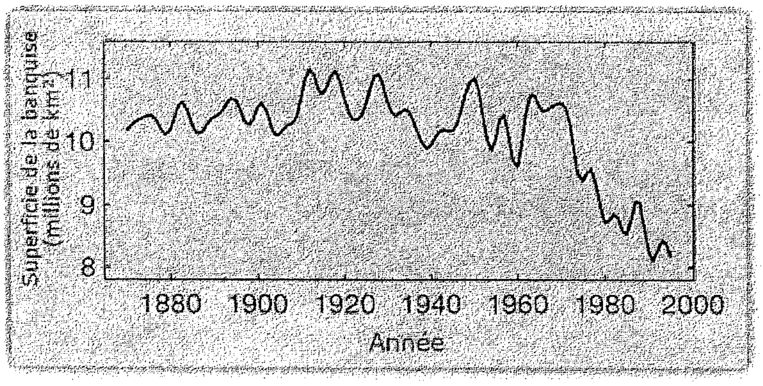
Filière :

N° d'examen :

Examen de langue

Semestre 2 – Session Normale Durée 2H

Des chercheurs ont étudié la fonte de la banquise arctique depuis mille quatre cent cinquante ans. Il en ressort que depuis quarante ans, cette fonte s'accélère et bat tous les records. Une période extrêmement longue, correspondant à une intensification de l'activité humaine.



Réchauffement de l'air et de l'eau

Quelles sont les causes de cette fonte accélérée et spectaculaire ?

Le réchauffement climatique, bien sûr, mais pas uniquement. Le deuxième élément responsable est, selon l'étude, le courant marin. C'est aussi ce phénomène – un courant apportant les eaux chaudes du nord de l'Atlantique vers l'Arctique – qui avait été responsable de la fonte de la banquise pendant le Petit Âge glaciaire (1550-1850).

C'est également ce qui semble se produire actuellement et bien sûr, avec la superficie de la banquise qui diminue, l'albédo s'affaiblit, ce qui entraîne un réchauffement de l'océan.

Finalement, si la rapidité de la fonte avoisine des valeurs qui avaient déjà été observées pendant les mille quatre cent cinquante dernières années, c'est surtout l'importance de la période de régression qui est impressionnante.

Les auteurs concluent leur étude en se prononçant sur les causes d'un tel phénomène. Selon eux, l'activité humaine fait partie des candidats très plausibles. Si la situation se poursuivait « *elle pourrait bientôt mener à un océan Arctique sans glace pendant l'été* ».

La banquise : bloc de glaces flottantes. **Fonte v. fondre** : rendre liquide sous l'effet de la chaleur

I- Compréhension :

1- De quel type de texte s'agit-il ? justifiez votre réponse. 1pt

- ....
....

2- Quelle est la cause actuelle qui renforce le réchauffement climatique ? expliquez ce phénomène en quelques lignes. 1,5pt

- ....
....
....
....

3- Quel est le véritable responsable du réchauffement climatique, selon les auteurs de ce rapport ? 1pt

- ....
....

4- Que constatez-vous à partir de la courbe représentée dans le texte ? 1pt

- ....
....
....
....
....

II- Langue et communication :

1- **Compléter le tableau suivant à partir du texte : 1,5pt**

Elément caractérisé	Caractérisant	Nature du caractérisant
....	....	Adjectif
Le réchauffement	....	....
....	....	Proposition subordonnée relative

2- **Relevez du texte une phrase qui exprime la condition et précisez s'il s'agit d'une condition réelle, possible ou irréelle : 1pt**

- ....
....

3- **Précisez la relation logique exprimée dans les propositions suivantes : 1,5pt**

- Les pluies torrentielles ont provoqué de grandes inondations. ....
- Il a mis des gants de peur qu'il ne se blesse. ....
- Bien qu'il ait sérieusement préparé son examen, il n'a pas été admis. ....

4- **Relevez du texte une phrase exprimant la conséquence en précisant le moyen qui l'introduit : 1pt**

- ....
....
- **Le moyen 0,5pt :** ....

5- **Reformulez les phrases suivantes en utilisant les expressions entre parenthèses et en effectuant les transformations nécessaires : 3pts**

- Je suis prêt à lui pardonner sa faute s'il me fait des excuses. (à moins que)
- ....
- Elle fait preuve d'une grande maturité même si elle est très jeune. (bien que)
- ....
- Bien qu'il soit prudent, il a eu un accident. (malgré)
- ....

6- **Conjuguez les verbes entre parenthèses au temps qui convient : 1pt**

- Si tu avais été attentif, je (ne pas avoir) .... Besoin de répéter.
- Si le temps le permet, je (venir) .... te voir demain.

III- Production écrite : 6pts

- **Expliquez en une quinzaine de lignes en quoi les activités humaines peuvent avoir un impact négatif sur l'environnement, en donnant des exemples d'actions qui permettent de sauvegarder notre planète.**

Eléments à évaluer:

- La pertinence des idées,
- La correction de la langue,
- La cohérence du texte,
- L'utilisation des outils grammaticaux étudiés.

bUNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI

FACULTE DES SCIENCES

EL JADIDA

Année Universitaire 2011/2012

Nom et prénom :

filière :

N° d'examen :

Examen de langue

Semestre 2- Session Normale- Durée 1H30

L'eau représente 70% du poids de l'adulte et 80% du poids de l'enfant. Une perte de 10% entraîne des troubles graves, voire la mort, si ce pourcentage atteint 20%. La croissance démographique est la pression la plus importante sur la ressource en eau, pourtant le thème de l'eau ne retient pas suffisamment l'attention des institutions internationales : elle n'est pas représentée par un organisme spécifique.

Dans de nombreux pays en développement, de 80 à 90 pour cent des eaux usées déversées sur les côtes sont des effluents bruts, c'est à dire des rejets qui n'ont pas été traités. La pollution, liée à une démographie galopante dans les zones côtières et à des infrastructures d'assainissement et de traitement des déchets inadéquates, constitue une menace pour la santé publique, les espèces sauvages ainsi que pour les sources de revenu comme la pêche et le tourisme.

Bien qu'elles soient réparties de manière inégale, les ressources en eau douce sont loin de manquer à l'échelle de notre planète. Pourtant, du fait de la mauvaise gestion, de moyens limités et des changements environnementaux, quasiment un habitant de la planète sur cinq n'a toujours pas accès à l'eau potable et 40% de la population mondiale ne disposent pas d'un service d'assainissement de base, indique le deuxième rapport mondial des Nations Unies sur la mise en valeur des ressources en eau. Le manque d'accès à l'eau potable et à l'assainissement, tue 8 millions d'êtres humains chaque année et représente à ce titre la première cause de mortalité dans le monde, un défi majeur et crucial pour l'humanité.

I- Compréhension :

1- <u>Donnez un titre à chaque paragraphe. 1,5 pt</u>
   - Paragraphe1 ……………………………………………………………………………
   - Paragraphe2 ……………………………………………………………………………
   - Paragraphe3 ……………………………………………………………………………

2- <u>Quelles sont les conséquences négatives des eaux polluées déversées dans les mers ? 1pt</u>
   - ……………………………………………………………………………………………………
     ……………………………………………………………………………………………………
     ………………………………………………………………………

3- <u>Selon le texte, à quoi est due l'insuffisance d'accès à l'eau potable ? 1pt</u>
   - ……………………………………………………………………………………………………
     ……………………………………………………………………………………………………
     ……………………………………………………………………………………………………

4- <u>Quel est actuellement le grand défi pour l'humanité en matière de l'eau ? 1pt</u>
   - ……………………………………………………………………………………………………
     ……………………………………………………………………………………………………
     ……………………………………………………………………………………………………

II- Langue et Communication :

1- <u>Donnez une brève explication aux groupes de mots suivants 1,5pt</u>

- La croissance démographique : ....
- L'eau potable : ....
- L'assainissement : ....

2- **Relevez du premier paragraphe trois mots qui expriment le jugement de l'auteur et précisez leurs natures. 1,5pt**

- ....
- ....
- ....

3- **Reformuler les phrases suivantes en utilisant le gérondif: 2pts**

- L'état participe à la gestion de l'eau par la construction des barrages.
- ....
....
- Grace à la sensibilisation de la population, l'association réalise ses objectifs.
- ....
....

4- **Précisez la cause et la conséquence dans la phrase suivante ; reformulez la même phrase par l'*une* des expressions suivantes :**

(Grâce à, à cause de) 1,5pt

- Du fait de la mauvaise gestion, un habitant sur cinq n'a toujours pas accès à l'eau potable.
- Cause : ....
- Conséquence : ....
- Reformulation :...
....

5- <u>Précisez la relation logique exprimée dans la phrase suivante et reformulez la en utilisant **« Malgré »** puis **« même si » 2pts**</u>

- Bien qu'elles soient réparties de manière inégale, les ressources en eau douce sont loin de manquer. (..)
- ....
....
- ....
....

6- <u>Remplacez **« Si »** dans la phrase suivante par **« à moins que » 1pt**</u>

- Si on ne prend pas des mesures nécessaires, notre environnement se dégradera davantage.
- ....
....

III- Production écrite : 6pts

- La ville d'El Jadida souffre énormément de la pollution causée par les eaux usées rejetées dans la mer. Quelles sont les conséquences directes de ce problème sur la ville et les solutions envisageables?

Eléments à évaluer :

- La pertinence des idées,
- La correction de la langue,
- La coherence du texte,
- L'utilisation des outils grammaticaux étudiés.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKAL

FACULTE DES SCIENCES

EL JADIDA

+CLUB NAJAH+ UCD.FS.ELJADIDA LE PRÉSIDENT

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2013 /2014

Nom : ……………………………………………………………………..

prénom : ……………………………………………………………….

Salle ………………… Numéro d'Examen…………………

Examen de langue Semestre 2 – Session de rattrapage - durée 1h30

La mondialisation est la formation de liens qui s'étendent sur toute la planète. ……………. , la mondialisation n'est pas une mauvaise chose en soi. ………………. c'est la façon dont elle s'est faite au cours des siècles qui pose problème. ………………, elle engendre des inégalités économiques croissantes et cela …………………………….. entre les pays dominants et dominés, …………………. aussi à l'intérieur des pays.

La mondialisation a également des effets néfastes sur l'environnement. Elle contribue à l'augmentation des gaz à effet de serre et au réchauffement climatique. Par ailleurs, comme les pays en développement ont des règles moins contraignantes en matière de droits de l'homme et de l'environnement, certaines multinationales exploitent les ressources naturelles de ce pays sans se soucier de l'environnement et des populations qui y vivent.

1) Ce texte est-il :

A- Descriptif B- Narratif C- Explicatif D- Argumentatif

2) La mondialisation a des effets néfastes sur :

A- Sur les pays sous développés ;
B- Sur les pays développés;
C- Sur tous les pays.
D - sur les pays en développement.

3) La mondialisation signifie :

A- La globalisation B- la généralisation C- L'union D- la fédération

4) Quel est l'ordre des articulateurs suivants dans le texte :

A-en effet – non seulement – en fait – mais – mais
B- mais – non seulement – mais – en effet – en fait
C - en fait – mais – en effet - non seulement – mais
D- en effet – en fait - mais – non seulement – mais

5) « Les pays en développement ont des règles moins contraignantes en matière de droits de l'homme et de l'environnement. »

Le mot « contraignantes » signifie :

A- faciles B- obligeantes C- claires D- générales

6) La nanoscience permet de créer des objets :

A- De moins en moins petits B - De plus en plus petits C - De plus en plus grands

7) Cette machine permet de scruter les éléments microscopiques :

Le verbe scruter veut dire :

A- Observer pour comprendre
B- voir des choses infimes
C - Remarquer
D- Tester

8) Un bon conducteur thermique est un corps qui a une grande conductivité thermique et une bonne capacité calorifique. Ces ……………………………………………… sont d'une grande importance dans le transfert de chaleur.

A- Aspects B- éléments physiques C- propriétés physiques

9) L'éclipse lunaire se produit ………………………………. l'alignement de la lune, de la terre et du soleil.

A- en dépit de B- malgré C- à force de D- en raison de

10) Si les organisations internationales n'apportaient pas leur soutien aux pays pauvres, la situation serait encore plus catastrophique.

Dans cette phrase l'hypothèse-est-elle :

A- Possible B- Irréelle ; C- Réelle ; D- Probable ;

11) Au cas où tu …………………… exactement le protocole de l'expérience, tu …………………… pas le même résultat.

A – n'appliqueras – n'auras pas B- n'appliquerais pas – n'auras pas

C - n'appliques pas – n'auras pas D – n'appliques pas – n'aurais pas

12) Quelle est la relation logique exprimée dans cette phrase ?

J'ai visité l'exposition CHAIBIA TALAL à la grande galerie : mon professeur de dessin me l'avait conseillé.

A- La cause B- La conséquence C- Le but D- la condition

13) Notre environnement se dégradera davantage si on ne prend pas les mesures nécessaires.

A- Notre environnement se dégradera davantage si on prend les mesures nécessaires.
B- Notre environnement ne se dégradera pas davantage si on ne prend pas les mesures nécessaires.
C- Notre environnement ne se dégradera pas davantage à moins qu'on prenne les mesures nécessaires.
D- Notre environnement se dégradera davantage à moins qu'on prenne les mesures nécessaires.

14) Les forces nucléaires sont responsables de la présence d'éléments différents dans la nature

A- Cause B- conséquence C- but D- condition

15) Si tu ………………………………. attentivement aux cours, tu aurais facilement répondu à toutes les questions.

A- assistais B- avais assisté C- aurais assisté D- as assisté

16) Toutes les personnes que ………………………………. doivent se rendre à la salle numéro 3.

A -J'ai cité le nom B- j'ai citées à haute voix C- j'ai demandé de sortir D- j'ai noté les noms

17) …………………….. une concurrence de plus en plus forte, nos performances sont meilleures …………………….. la qualité de nos produits.

A- en dépit de - grâce à B- en raison de - en dépit de
C- en dépit de - grâce à D- à cause de – en raison de

18) En admettant que tous les chocs des molécules ……………………… efficaces, les réactions seraient instantanées.

A- étaient B- sont C- soient D- seraient

19) L'auriez-vous pardonné ………………… sa faute?

A- d'avouer B - s'il avait avoué C - s'il eût avoué D - qu'il eût avoué

20) Remettez en ordre les phrases suivantes pour constituer un texte cohérent :

A) Chaque produit à un cycle de vie, il y a d'abord la phase de conception du produit.
B) L'entreprise doit communiquer pour le faire connaitre.
C) Le produit arrive ensuite en phase de croissance.
D) Puis, le produit est lancé sur le marché,
E) Enfin, le produit entre dans une phase de déclin pendant laquelle les ventes diminuent.
F) Les ventes sont au maximum.
G) Il devient rentable pour l'entreprise
H) C'est alors que le taux de croissance diminue.

1) A – D – B – C – G – F - E - H
2) A– D – C - B – F – E – G - H
3) A - B – G – D – C – E – F -H -
4) A – C – B – D – F – G – E - H

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKAL

FACULTE DES SCIENCES

EL JADIDA

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

BNNEE UNIVERSITAIRE : 2013 /2014

Nom : ....

prénom : ....

CNE :...

Salle .... Numéro d'Examen.....................

<u>Avertissement :</u> Si vous choisissez la bonne réponse, elle vous rapportera **<u>UN point</u>** ; le choix d'une mauvaise réponse, il vous sera retiré **<u>UN point</u>**. Absence de réponse **<u>ZERO point</u>**

Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Si vous cochez plus d'une réponse, la question sera comptabilisée comme fausse.

Examen de langue

Semestre 2 – durée 1h30 / SMAI/SVT

« Je les invite à annoncer de courageux engagements et actions qui catalyseront le changement dont nous avons besoin », a déclaré M. Ban à l'ouverture à Abou Dhabi d'une réunion ministérielle. Si nous n'entreprenons pas une action urgente, tous nos plans pour accroitre la prospérité et la sécurité mondiales n'aboutiront pas », a-t-il prévenu devant les représentants des pays membres de l'ONU.

Un groupe intergouvernemental d'experts sur le climat (GIEC) a averti dans un rapport publié en avril à Berlin que limiter le réchauffement climatique à 2°C par rapport à l'ère préindustrielle est encore possible, mais implique d'agir vite pour réduire les émissions de gaz à effet de serre de 40 à 70% d'ici 2050. Sans changement majeur et rapide dans le mix énergétique mondial très dépendant du charbon et du pétrole, la hausse du thermomètre sera de 3,7 à 4,8°C à l'horizon 2100, avertit le GIEC. «la première priorité de l'ONU est maintenant de rendre ce monde durable non seulement économiquement et socialement mais aussi sur le plan de l'environnement », a rappelé M. Ban lors d'une conférence de presse.

En prévision du sommet de septembre, « j'invite les dirigeants des pays membres à venir à des objectifs courageux et ambitieux, et à catalyser et accélérer les actions sur le terrain », a-t-il ajouté. « Je suis confiant » quant à la possibilité d'aboutir à un accord en décembre 2015 à Paris, tout en avertissant que « plus nous tardons, plus nous payerons » le prix du réchauffement climatique.

1) **Ce texte est-il :**
   A- Descriptif B- Narratif C- Explicatif D- Argumentatif

2) **L'objectif majeur de l'ONU, selon le texte, est de rendre le monde durable**
   A- Sur le plan économiquement et social ; B- Sur le plan de l'environnement ; C- Sur les trois plans.

3) **Selon le GIEC, la limitation du réchauffement climatique est :**
   A- Possible sans réserve ; B- Impossible.
   C- Possible ; D- Sûre et certaine ;

4) **Les mots : GIEC et ONU sont :**
   A- Des mots composés **B**- Des onomatopées
   C- Des sigles D- Des abréviations

5) **Quel est le mot intrus dans cette liste : cyclone, tempête, torpille, Typhon, tremblement de terre, tornade, Bourrasque, Ouragan.**
   A- Tornade B- Typhon C- Bourrasque D- Torpille

6) **Quel est le mot intrus : Eprouvette, Fiole, Flûte, Flacon, Hôte, Pipette, Tube,**
   A- Flacon B- Hôte C- Fiole D- Flûte

7) On utilise l'hygromètre pour mesurer :

A- Le degré d'humidité
B- La direction du vent
C- Les précipitations
D- La force du vent

8) Avant la mise en vente d'un médicament, il faut d'abord l'éprouver. Le mot éprouver signifie :

A- Le valider
B- L'accepter
C- Lui faire Subir des difficultés
D- Le tester

9) Pour satisfaire les besoins électriques d'une agglomération, située loin des barrages, on utilise des chaudières qui peuvent fonctionner au charbon, au fuel ou aux hydrocarbures. Ces .... ont un pouvoir calorifique très élevé. Quel est le mot approprié pour compléter le sens :

A- Combustibles
B- carburants
C- matières premières,

10) Le propos dans la phrase suivante est-il sûr ou non sûr :

A	B
Sûr	non sûr

- Ahmed prétend qu'il m'a rendu mon livre.

11) Le propos dans la phrase suivante est-il sûr ou non sûr :

A	B
Sûr	non sûr

- Il paraît que les impôts vont augmenter.

12) « Si nous n'entreprenons pas une action urgente, tous nos plans pour accroitre la prospérité et la sécurité mondiales n'aboutiront pas »

Dans cette phrase le fait hypothétique est-il :

A- Probable
B- Impossible
C- Certain
D- Possible

13) la phrase suivante : « Sans changement majeur et rapide dans le mix énergétique mondial très dépendant du charbon et du pétrole, la hausse du thermomètre sera de 3,7 à 4,8°C à l'horizon 2100», exprime-t-on :

A- Le moyen
B- La condition
C- La cause
D- La conséquence

14) .... l'activité humaine, la concentration des gaz à effet de serre s'est sensiblement modifiée. Quel est l'expression appropriée qui complétera le sens :

A- Du fait De
B- Au point de
C- Grace à
D- En dépit de

15) La limitation du réchauffement climatique est devenue possible .... l'implication des grands pollueurs dans la réduction des gaz à effet de serre.

Compléter la phrase suivante par l'expression qui convient :

A- grâce à
B- sous l'effet de
C- à cause de
D- à force de

16) Si les pays industrialisés avaient pris les mesures adéquates pour limiter les émissions de gaz à effet de serre, la couche d'ozone n'aurait pas été endommagée.

Dans cette phrase l'hypothèse-est-elle :

A- Possible
B- Irréelle ;
C- Réelle ;
D- Probable ;

17) Ça me (faire) .... tellement plaisir, si vous acceptiez mon invitation.

A- Fera
B- ferait
C- fait
D- m'a fait

18) Quelle est la relation logique exprimée dans cette phrase ?

Les altérations du climat sont provoquées par la raréfaction du tapis végétal.

A- La cause
B- La conséquence
C- Le but

19) Si tu m'avais averti, j'aurais pris mes précautions.

Cette phrase exprime-t-elle :

A- Un reproche, B- Un conseil C- .Une hypothèse D- Une condition,

20) Il possible de limiter le réchauffement climatique à condition que les pays industrialisés réduisent leur émission de gaz à effet de serre. Parmi les phrases ci-dessous, laquelle à le même sens ?

A- Il n'est pas possible de limiter le réchauffement climatique sauf si les pays industrialisés réduisent leur émission de gaz à effet de serre.

B- Il est possible de limiter le réchauffement climatique si les pays industrialisés ne réduisent pas leur émission de gaz à effet de serre.

C- Il est possible de limiter le réchauffement climatique sauf si les pays industrialisés réduisent leur émission de gaz à effet de serre.

21) Certains oiseaux mâles décorent leur nid avec des objets colorés .... séduire les femelles.

A- à force de, B- pour que C- de manière à D- à cause de,

22) Si tu ne m'avais pas dit qu'il était incompétent, je l' (engager)................................

A- serais engagé B- engage C- engagerais D- aurais engagé

23) La seule chose dont .... c'est qu'il faut continuer à se battre.

A- je suis convaincu. B- Je souhaite C- je crois, D- je pense,

24) .... la force de la pesanteur, une particule chargée peut s'immobiliser .... d'un champ électrostatique.

A- Bien que - sous l'effet B- Malgré - sous l'influence

C- En raison de - en dépit de D- Malgré - à force de

25) Le conférencier parle très fort afin qu'il soit bien entendu dans l'amphithéâtre.

Avec l'expression « de crainte que », on aura :

A- Le conférencier ne parle pas très fort de crainte qu'il ne soit pas bien entendu dans l'amphithéâtre

B- Le conférencier parle très fort de crainte qu'il ne soit pas bien entendu dans l'amphithéâtre.

C- Le conférencier parle très fort de crainte qu'il soit bien entendu dans l'amphithéâtre

26) Le charbon et le pétrole sont-ils des ressources naturelles :

A- Non conventionnelles B- Conventionnelles C- Durables

27) Il faut absolument que tu (aller) .... chez le dentiste.

A- Vas B- ailles C- allais D- aies

28) Figure toi que j'ai consulté une voyante. Elle m'a dit qu'elle n' (être) .... pas certaine que je (être) .... très heureuse en ce moment. Mais elle m'a assuré que m'a situation (aller) .... d'arranger. Je souhaite qu'elle (dire) .... vrai.

A- était - j'étais – allait - dit B- est - suis - va – dise

C était - sois - allait - dise D- n'a pas été - sois - ira - dise

29) L'histoire que .... est vraie.

A- Je me souviens. B- Je vais vous raconter C- Je vais vous parler

30) Remettez en ordre les phrases suivantes pour constituer un texte cohérent :

A- Elle s'appelle Christine Malève, elle a 28 ans et est infirmière à Mantes-la-Jolie.

B- En effet, il n'y a pas eu de vol, ni de détournement d'argent, pas de sadisme, ni de folie meurtrière.

C- Voilà enfin qui ravive douloureusement le débat difficile de l'euthanasie en France et ailleurs.

D- D'après l'enquête, il semble que ses motifs ne soient pas criminels.

E- Elle est d'abord inculpée pour meurtre après avoir « mis fin aux souffrances » d'une trentaine de malades incurables.

F- Elle a reconnu les faits, précisant par ailleurs qu'elle avait agi la plupart du temps à la demande des familles ou des patients eux-mêmes.

A- C – A – B – F – E – D B- A– B – C – D – E – F

C B - F – A – D – C – E C- E – A – D – F - C – B

Examen Informatique
Algorithmique et Programmation
Durée 1h30mn

La résolution d'un problème informatique passe par 4 phases essentielles

Phase 0 : ***Énoncé*** *(spécifications).*
Phase 1 : *Étape de* ***réflexion*** *(conception abstraite).*

A partir de l'énoncé on doit définir les flux entrants (les données du problème), les flux sortants (les résultats du problème), et le moyen de passer des uns aux autres :

➔ ***Données ; Résultats ; Traitement***

Phase 2 : ***L'algorithme*** *associé à son lexique (conception concrète).*
Phase 3 : ***Programmation*** *(codification).*
Phase 4 : *jeux d'essai (**tests**)*

Pour le problème suivant, vous êtes tenu de réaliser les phases 1 et 2 de cette méthodologie.

Problème : Grands jeux sportifs

Phase 0 : Énoncé (*spécifications*).

Un centre de vacances décide d'organiser pour les enfants (on ne connaît pas à l'avance le nombre de ces enfants) un après-midi '**grands jeux sportifs**'.

Il s'agit de 5 catégories d'épreuves (codée 1 pour **Précision**, 2 pour **débrouillardise**, 3 pour **résistance**, 4 pour **vitesse**, 5 pour **endurance**), chacune de ces 5 catégories est constituée de 3 épreuves obligatoires (A pour facile, B pour moyen, C pour difficile).

Tout enfant qui a réussi l'une des épreuves de chaque catégorie se voit attribuer :

- 5 points pour la première épreuve.
- 10 points pour la seconde épreuve.
- 20 points pour la troisième épreuve.

On désire connaître pour chaque enfant le nom et le prénom, le nombre de points par catégorie, ainsi que le nombre total des points obtenus.
On veut aussi déterminer le nombre de points total ayant été obtenu par l'enfant (ou les enfants) vainqueur(s), ainsi que la moyenne générale de l'ensemble des enfants aux 'grands jeux sportifs'.

La démarche

La démarche proposée consiste à développer des modules simples en traitant chaque sous problème dans un module comme défini par un schéma organisationnel.

Schéma organisationnel.

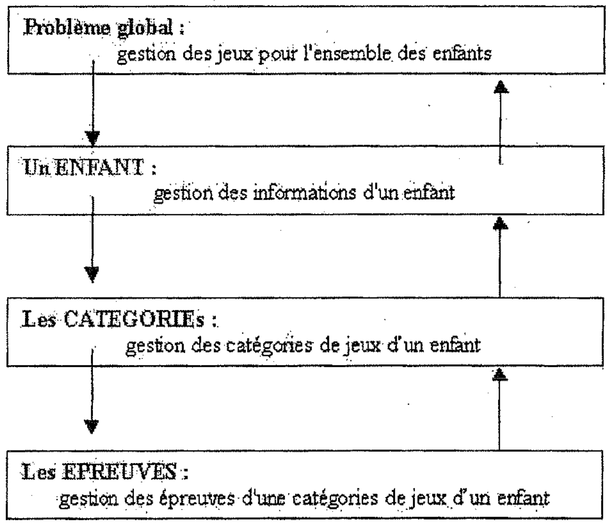
Schématisons l'enchaînement des traitements à mettre en œuvres par une série de modules algorithmiques.

Module 1 :

Module 2 :

Module 3 :

Module 4 :



Travail demandé

Il est demandé de développer les 4 modules du schéma organisationnel ci-dessus séparément en suivant les deux phases 1 et 2 proposées au début de ce sujet.

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences d'El Jadida
Département de Mathématiques et Informatique

Examen de Programmation Mathématique
Durée : 03 heures

Exercice 1. Utiliser le simplexe [redacted] pour résoudre le programme suivant :

$$(PL)\begin{cases} \textit{Minimiser } z(x) = & 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ \text{s. c.,} & 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 5, \\ & 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 8, \\ & 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit le programme

$$(P)\begin{cases} \textit{Minimiser } f(x,y) & = x^2 + y^2, \\ s.c. & x^2 \leq y, \\ & -x + y \geq 1, \\ x, y \in \mathbb{R}. & \end{cases}$$

1. Montrer que (P) est convexe et vérifier les conditions de Slater.
2. Donner explicitement la fonction de dualité de (P).
3. Résoudre (P).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
- f est différentiable,
- ∇f est de Lipschitz de constante L,
- $\exists \alpha > 0 : u^T \nabla^2 f(x) u \geq \alpha u^T u$ pour tout $u, \ x \in \mathbb{R}^n$.

On donne l'algorithme du gradient à pas fixe $a > 0$:

$$x_{k+1} = x_k - a\nabla f(x_k).$$

1. Établir que f admet un minimum unique x^* et que $\nabla f(x^*) = 0$.
2. Montrer que
$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq \left(1 - 2\alpha a + L^2 a^2\right)\|x_k - x^*\|_2^2,$$
Indication : on pourra développer $\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \langle x_{k+1} - x^*; x_{k+1} - x^*\rangle$.
3. En déduire que l'algorithme converge vers l'unique optimum de f si $a \in]0, \frac{2\alpha}{L^2}[$.
4. Application : Vérifier que la fonction $F(x,y) = x^2 + 2y^2$ satisfait les hypothèses et donner les suites (x_k, y_k) de l'algorithme du gradient à pas fixe.

Bonne chance.

Département Maths et Info
Faculté des Sciences EL Jadida
Université Chouaïb Doukkali
El Jadida

Session Juin 2012
Examen Algorithmique
Durée : 1h30
Nombre de pages : 2

Début du préambule

Cette épreuve à pour objet de tester votre capacité à comprendre un problème donné, à l'analyser et à en faire algorithme ; la partie pascal ayant été évaluée lors des travaux pratiques.

Introduction (question non notées mais vous aideront à rentrer dans l'esprit de l'examen)

- Avez-vous avez déjà ouvert un livre de recettes de cuisine ?
- Avez-vous déjà déchiffré un mode d'emploi traduit du coréen pour faire fonctionner un appareil électronique ?

Si oui?

- Sans le savoir vous avez déjà exécuté des algorithmes.

Encore plus fort :

- Avez-vous indiqué un chemin à un touriste égaré ?
- Avez-vous fait chercher un objet à quelqu'un par téléphone ?
- Si oui?
  - Vous avez déjà fabriqué - et fait exécuter- des algorithmes

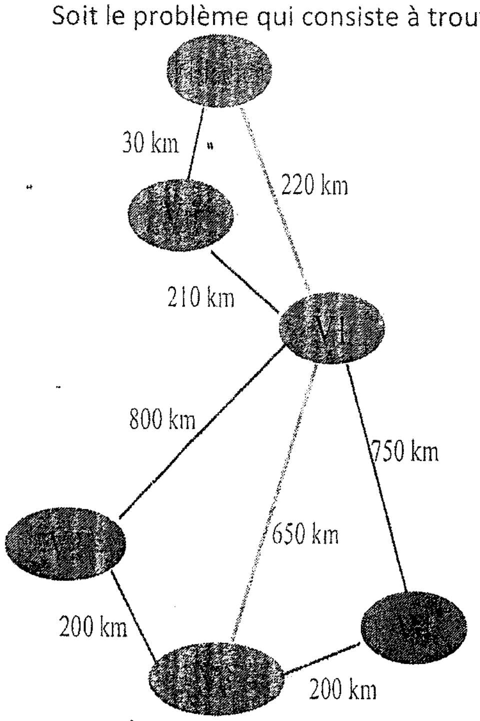
En fait Un algorithme est une suite d'instructions qui une fois exécutée correctement, conduit à un résultat donnée.

Fin du préambule.

Début de l'examen

1- **Question introductive :**

Soit le problème qui consiste à trouver le plus court chemin entre El Jadida et la ville V3.



Compléter brièvement les rubriques suivantes :

Type de données reçues (Input) : ....

Nom de l'Algorithme : ....

Résultats attendus : ....

2- Question méthodologique

Soit l'énoncé suivant :

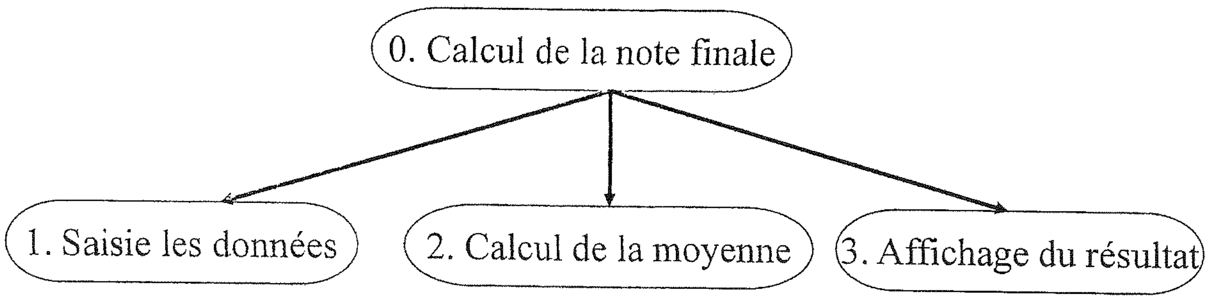
Écrire un programme qui simule la conversion d'un nombre décimale en tant que chaîne de caractères en sa valeur réelle.
Exemples de nombres à lire : 12 45.3 0.9625 (notation décimale)

Q1 : Donne un nom à un tel algorithme
Q2 : Donnez votre analyse globale de cet énoncé :
Q3 : Que doit faire le programme qui permet de répondre à cet énoncé
Q4 : Ecrire les grandes étapes d'un algorithme en pseudo code répondant à cet énoncé. Il s'agit ici de décomposer le problème en sou problèmes plus standards.

3- Question technique

Partant d'un schéma représentant le calcul de la moyenne de notes avec coefficients

$$\boxed{Note = \frac{3}{4} \times Sup(\frac{(Ex + Ds)}{2}, Ex) + \frac{1}{4} \times Tp}$$



Nous effectuons l'analyse suivante :

> <u>Données reçues (Input)</u> : Ex, Ds, Tp
> <u>Nom de l'Algorithme</u> : Lire les données, calculer la moyenne, afficher le résultat
> <u>Résultats attendus</u> : Note

Q. : Ecrire les algorithmes associés aux étapes 0, 1, 2 et 3

4- Question d'organisation

Q1 : Citer sou forme d'un tableau à deux colonnes les différents types de variables ainsi que leurs spécificités

Dans la programmation structurée nous utilisons le principe de la stratégie « Diviser pour régner ». Descartes disant à ce sujet : « «*Pour maîtriser la complexité du problème à résoudre, diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il pourrait et qu''il serait requis pour mieux le résoudre* »

Q2 : Ecrire sous forme de tableau les différentes divisions qui permettent de faciliter la résolution d'un programme ainsi que la signification de chacune d'entre elles.

Phase 1

variables	*Type*	*Définition*
CATEGORIE	(entier)	Indice d'itération comptant les catégories
POINT_CATEG	(entier)	Total des points obtenus par un enfant dans une catégorie calculé dans le module **LES_EPREUVES**

Phase 2

<u>Début</u>

ENFANT_POINT ⍰ 0 {initialisation du total des points obtenus par l'enfant}
Pour CATEGORIE de 1 à NBCATEG faire
⍰ **LES_EPREUVES**
Ecrire(POINT_CATEG) {<u>résultat demandé</u> : le total des points de la catégorie}
{on calcule le nombre de point total de l'enfant}
ENFANT_POINT ⍰ ENFANT_POINT + POINT_CATEG
Fin pour CATEGORIE

<u>Fin</u>

Module 4 : LES_EPREUVES
{Ce module doit permettre de déterminer le nombre de points obtenus (par un enfant) aux différentes épreuves d'une catégorie POINT_CATEG}.

Phase 1

variables	*Type*	*Définition*
EPREUVE	(entier)	Indice d'itération comptant les épreuves
REUSSI	(Caractère)	A 'O' indique que l'enfant a réussi l'épreuve

Phase 2

<u>Début</u>

```
POINT_CATEG ⍰ 0 {initialisation du total des points de la catégorie}
Pour EPREUVE de 1 à NBEPREUV faire
Lire (REUSSI)
Si REUSSI = 'O' {si l'enfant a réussi l'épreuve}
Alors

        Si EPREUVE = 1
        Alors POINT_CATEG ⍰ POINT_CATEG + PA {5 points}
        Sinon
                Si EPREUVE = 2
                Alors POINT_CATEG ⍰ POINT_CATEG + PB {10 points}
                Sinon
                        Si EPREUVE = 3
                        Alors POINT_CATEG ⍰ POINT_CATEG + PC {20 points}
                        Finsi
                Finsi
        Finsi
Fin si
```

<u>FIN</u>

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences EL JADIDA A.U 2009-2010

Examen Info2 SMIA$_2$

Durée 1h30mn

Questions de cours :

1. Ecrire votre démarche de programmation d'un problème.
2. Définir la complexité d'un algorithme. Donner un exemple.

Exercice 1

Ecrire un algorithme permettant de :

- Lire un nombre « n » fini de notes comprises entre 0 et 20
- Afficher la meilleure note, la mauvaise note et la moyenne de toutes les notes
- Afficher le pourcentage des notes supérieures ou égales à 10.

Exercice 2

Ecrire un programme en Pascal qui lit :

- Un mot (chaîne de caractères formée uniquement de lettres)
- Une lettre

puis affiche le nombre d'apparitions de la lettre dans le mot.

Exercice 3

Ecrire un programme en Pascal *ProdScal* qui calcule le produit scalaire de deux vecteurs U et V représentés par deux tableaux.

Le produit scalaire de deux vecteurs : $U = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $V = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est :

$$U.V = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_n.y_n$$

Exercice 4

Ecrire un programme en Pascal qui simule le jeu suivant :

a- A tour de rôle, l'ordinateur et le joueur choisissent un nombre qui ne peut prendre que 3 valeurs : 0, 1 ou 2.

⇨ L'instruction : n := random(3) réalise le choix de l'ordinateur

b- Si la différence entre les nombres choisis vaut :

- 2, le joueur qui a proposé le plus grand nombre gagne un point
- 1, le joueur qui a proposé le plus petit nombre gagne un point
- 0, aucun point n'est marqué

c- Le jeu se termine quand l'un des joueurs totalise 10 points.

Examen Informatique
Algorithmique et Programmation
Rattrapage - Durée 1h30mn

Il vous est demandé de corriger les erreurs qui ont été glissées dans les algorithmes associés à l'énoncé suivant :

Phase 0 : Énoncé (*spécifications*).

Un centre de vacances décide d'organiser pour les enfants (on ne connaît pas à l'avance le nombre de ces enfants) un après-midi '**grands jeux sportifs**'.

Il s'agit de 5 catégories d'épreuves (codée 1 pour **Précision**, 2 pour **débrouillardise**, 3 pour **résistance**, 4 pour **vitesse**, 5 pour **endurance**), chacune de ces 5 catégories est constituée de 3 épreuves obligatoires (A pour facile, B pour moyen, C pour difficile).

Tout enfant qui a réussi l'une des épreuves de chaque catégorie se voit attribuer :

- 5 points pour la première épreuve.
- 10 points pour la seconde épreuve.
- 20 points pour la troisième épreuve.

On désire connaître pour chaque enfant le nom et le prénom, le nombre de points par catégorie, ainsi que le nombre total des points obtenus.
On veut aussi déterminer le nombre de points total ayant été obtenu par l'enfant (ou les enfants) vainqueur(s), ainsi que la moyenne générale de l'ensemble des enfants aux 'grands jeux sportifs'.

La démarche

La démarche proposée consiste à développer des modules simples en traitant chaque sous problème dans un module comme défini par le schéma organisationnel précédent.

Algorithmes proposés

<u>Module 1 : Problème Global</u>

Phase 1

constantes		Définition
NBCATEG = 5		Nombres de catégories d'épreuves
NBEPREUV = 3		Nombres d'épreuves dans une catégorie
PA = 5		Nombres de points obtenus pour avoir réussi l'épreuve A
PB = 10		Nombres de points obtenus pour avoir réussi l'épreuve B
PC = 20		Nombres de points obtenus pour avoir réussi l'épreuve C
variables	*Type*	*Définition*
NBENFANT	(entier)	Nombre total d'enfants ayant participé calculé dans le module **UN_ENFANT**
TOTPOINT	(entier)	Cumul des points obtenus par tous les enfants calculé dans le module **UN_ENFANT**
MAX_POINT	(entier)	Nombre de points obtenus par le vainqueur calculé dans le module **UN_ENFANT**
MOYPOINT	(réel)	Moyenne générale des points obtenus
REP	(caractère)	Permet de gérer la saisie

Phase 2

<u>Début</u>
NBENFANT 0
TOTPOINT 0
MAX_POINT 0

Lire(REP)
Tant que REP = 'O' faire
 UN_ENFANT {délocalisation du traitement d'un enfant}
Lire (REP)
Fin de tant que

Si NBENFANT > 0
Alors MOYPOINT TOTPOINT / NBENFANT
<u>résultats demandés :</u> le nombre de points obtenus par le vainqueur et la moyenne générale}
Ecrire (MAX_POINT, MOYPOINT)
Sinon écrire ('aucun enfant n'a participé')
Fin si
<u>Fin</u>

Module 2 : UN_ENFANT
{ce module doit permettre de déterminer le nombre de points maximum obtenus (par l'enfant vainqueur) MAX_POINT, le nombre total d'enfants NBENFANT, et le cumul des points obtenus par chaque enfant TOTPOINT}.

Phase 1

variables	*Type*	*Définition*
NOM	(chaîne)	Nom de l'enfant
PRENOM	(chaîne)	Prénom de l'enfant
ENFANT_POINT	(entier)	Total des points obtenus par un enfant calculé dans le module **LES_CATEGORIES**

Phase 2

<u>Début</u>

Lire (NOM,PRENOM)
 LES_CATEGORIES
Ecrire (ENFANT_POINT) {<u>résultat demandé :</u> le total des points de l'enfant}

{recherche du maximum des points obtenus par un enfant}
Si ENFANT_POINT > MAX_POINT
Alors MAX_POINT ENFANT_POINT
Fin si

{comptage du nombre d'enfants et du cumul des points}
NBENFANT NBENFANT + 1
TOTPOINT TOTPOINT + ENFANT_POINT
<u>Fin</u>

Module 3 : LES_CATEGORIES
{Ce module doit permettre de déterminer le nombre total de points obtenus (par un enfant) à l'ensemble des catégories ENFANT_POINT}.

Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences, El Jadida
Département d'Informatique

Année Universitaire 2013-2014
(SMAI2)
E.Module : Algorithmique

Examen

(Durée : 1h30)

QUESTION

Si un utilisateur (un client) vous demande de lui faire un programme sur ordinateur pour résoudre un problème donné, quelles sont les 5 étapes par lesquelles vous aller passer pour faire ce qu'il a demandé.

EXERCICE 1

Écrire un algorithme, qui demande à l'utilisateur un entier n strictement positif, et un réel x quelconque, puis calcule et lui affiche S1 S2 et S3 tels que :

$S1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

$S2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n$

$S2 = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n$

EXERCICE 2

Ecrire un algorithme puis le programme correspondant en langage C, qui lit un entier n puis calcule et affiche le terme S_n de la suite suivante :

$S_0 = 5$

$S_n = 10 + 3*S_{n-1}$ pour $n>0$

EXERCICE 3

Un utilisateur souhaite que vous lui fassiez un programme en langage C qui lit un texte de taille maximale 300 lettres. Qui afficher le nombre N de fois que la lettre 'a' est répété (en majuscule ou en minuscule). Puis le nombre M de mots (c'est à dire le nombre de fois que le l'espace ' ' est répété plus 1). Enfin le programme affiche le nombre K de paragraphes (c'est à dire le nombre de fois que le retour à la ligne est répété : le code ASCCI du retour à la ligne est 13).

EXERCICE 4

Écrire l'algorithme qui lit un tableau T de taille n ($1 \leq n \leq 100$) à éléments entiers, puis calcul et affiche la moyenne de tous les éléments du tableau T. Il détermine et affiche aussi le minimum et le maximum du tableau.

EXERCICE 5 (optionnelle)

Ecrire en langage C l'algorithme de l'exercice 4, en rajoutant le classement du tableau dans l'ordre croissant.

Éléments du langage C

Les instructions

L'instruction if fait des comparaisons :

```
if (Nombre >= 0)
    printf ("C´est vrai\n");
else
    printf ("C´est faux\n");
```

L'instruction for est utilisée pour une boucle à nombre fixe d'itérations :

```
for (i = 0; i < 20; i++)
    Tableau[i] = i;
```

Les boucles while et do servent à boucler tant que la condition en paramètre est vraie, avec la différence que la boucle while évalue la condition AVANT les itérations, alors que la boucle do l'évalue seulement APRÈS. Il s'en suit donc qu'une boucle do est toujours exécutée au moins une fois, quelle que soit la condition.

```
i = 0;
while (i < 10)
    {
    Tableau[i] = i;
    i++;
    }

i = 0;
do
    { Tableau[i] = i;
    i++;
    }
while (i < 10);
```

L'instruction switch sert à départager les instructions en fonction de la valeur d'une variable :

```
switch (i)
{
 case 1: printf ("La valeur de i est égale à un\n"); break;
case 2: printf ("La valeur de i est égale à deux\n"); break;
case 3: printf ("La valeur de i est égale à trois\n"); break;
default: printf ("La valeur de i est égale à autre chose\n"); break;
}
```

scanf et printf

Les prototypes génériques de ces deux fonctions se présentent sous la forme :

```
scanf("control", &arg1, &arg2, ...);
printf("control", arg1, arg2, ...);
```

Types de conversion

type	signification
%c	caractère
%s	chaîne de caractères
%d	nombre entier en décimal
%e	nombre réel sous la forme mantisse/exposant [-]m.nnnnnne[+|-]xx
%E	nombre réel sous la forme mantisse/exposant en majuscule [-]m.nnnnnnE[+|-]xx
%f	nombre réel sous la forme [-]mmm.nnnnnn
%g	nombre réel sous la forme la plus courte entre les types %e et%f
%G	nombre réel sous la forme la plus courte entre les types %E et%f
%o	nombre entier en octal
%p	pointeur ou adresse de la valeur numérique
%u	nombre entier non signé en décimal
%x	nombre entier en hexadécimal
%X	nombre entier en hexadécimal ; lettres affichées en majuscules

Exemple d'un programme simple

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main ()

  {
  printf ("Bonjour le monde\n");
  system("pause") ; return (0);
  }
```

Les types des variables s'établissent comme suit :

```
int             i,  j,  k;
int             Entier;
short           EntierDe16Bits;
long            EntierDe32Bits;
char            c; 8Bits
float           VirguleFlottante;
double          HautePrecision;
register int    ir;
unsigned char   Chaine[20];
unsigned char  * Pointeur;
int             TableauDEntiers[10][4];
```

Les opérateurs sont nombreux :

Opérateur	Description
+ - * /	Addition, soustraction, multiplication, division
++ --	Incrémentation, décrémentation
>> <<	Décalage de bits vers la droite et vers la gauche
& |	Opérateurs binaires ET et OU
== !=	Comparaison : égalité et différence
< > <= >=	Comparaison : plus petit, plus grand, plus petit ou égal, plus grand ou égal
&& ||	Comparaison : ET et OU logiques
=	Affectation simple
+= -= *= /= &= |=	Affectation complexe

http://www4.uqo.ca/direction-services/st/unix/langage-C.htm

http://www.linux-france.org/prj/embedded/sdcc/sdcc_course.formatted_10.html